Compléments sur les polynômes

Je me souviens

1. Que sont les polynômes ?
2. Quelles sont les opérations sur les polynômes ?
3. Que désigne $\mathbb{K}_n[X]$?
4. Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
5. Qu'est-ce que la fonction polynomiale associée à P ?
6. Parlons de racines d'un polynôme.
7. Qu'est-ce qu'un polynôme scindé ?
8. Relations coefficients-racines.
9. Quels sont les idéaux de $\mathbb{K}[X]$?

Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Typiquement $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

1 PGCD de deux polynômes

1.1 Définition du PGCD par les idéaux

Lemme. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$(A) + (B) = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = \{AU + BV,\ U, V \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Définition. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls. Alors il existe un unique polynôme unitaire D, appelé **PGCD de A et B**, tel que :

$$(A) + (B) = (D) \text{ i.e. } A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$$

Notation.

- On note $A \wedge B$ le PGCD de A et B.
- La relation $AU + BV = A \wedge B$ s'appelle **relation de Bézout**.

Proposition. Soit A, B deux polynômes non nuls. Les diviseurs communs à A et B sont les diviseurs de $A \wedge B$.

Remarque. *On retrouve la définition de première année : $A \wedge B$ est le polynôme unitaire, de plus grand degré, qui divise à la fois A et B.*

1.2 Algorithme d'Euclide

Proposition. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, supposés non nuls. En notant R le reste de la division euclidienne de A par B, on a :

$$A \wedge B = B \wedge R$$

Corollaire. En itérant l'utilisant de cette propriété, le degré du second polynôme est strictement décroissant, donc les itérations se terminent avec un reste nul. Le PGCD de A et B est alors le dernier reste non nul obtenu.

Corollaire. L'analyse de l'algorithme d'Euclide permet de construire un couple (U, V) de polynômes satisfaisant la relation de Bézout.

1.3 Polynômes premiers entre eux

Définition. On dit que A et B sont premiers entre eux lorsque $A \wedge B = 1$.

Remarque. *Deux polynômes sont premiers entre eux lorsque les seuls diviseurs communs sont les polynômes constants.*

Théorème de Bézout.

Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des polynômes U et V tels que :

$$AU + BV = 1$$

Proposition. Soit A, B deux polynômes non nuls, D un polynôme unitaire.

$$D = A \wedge B \iff \exists A_1, B_1 \in \mathbb{K}[X],\ \begin{cases} A = A_1 D \text{ et } B = B_1 D \\ A_1 \text{ et } B_1 \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$$

2 Un peu d'arithmétique des polynômes

Lemme de Gauss.

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$.

Corollaire. Si $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$, alors $AB \mid C$.

Corollaire. Si $A \wedge C = 1$ et $B \wedge C = 1$, alors $AB \wedge C = 1$.

3 Polynômes irréductibles, décomposition en facteurs irréductibles

3.1 Définition

Définition. Un polynôme P est dit **irréductible** s'il est non constant, et que ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes associés à P, i.e. les λP où $\lambda \neq 0$.

Analogie. *Les polynômes irréductibles sont aux polynômes ce que les nombre premiers sont aux entiers.*

3.2 Propriétés

Proposition. Un polynôme P est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de factorisation $P = AB$ où $0 < \deg(A) < \deg(P)$.

Proposition. Soit P irréductible, et Q quelconque. Alors soit $P \wedge Q = 1$, soit $P \mid Q$.

3.3 Exemples

Remarque. *L'étude générale des polynômes irréductibles n'est pas au probramme. Seuls la description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ est à connaître.*
La description des irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$ est, par exemple, très délicate.

Proposition.

- Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et ceux de degré 2 à discriminant < 0.

Remarque. $X^4 + 1$ *n'a pas de racine réelle, mais ce n'est pas un irréductible de* $\mathbb{R}[X]$.

3.4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème.

Tout polynôme P non constant se décompose de façon unique (à l'ordre des facteurs près) sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{m_i}$$

où les P_i sont irréductibles unitaires, les m_i dans $\mathbb{N}^*$ et λ le coefficient dominant de P.

Remarque. *Cette décomposition s'écrit :*

- *sur* $\mathbb{C}[X]$: $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$
- *sur* $\mathbb{R}[X]$: $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$ où $b_j^2 - 4c_j < 0$.

3.5 Utilisation de la décomposition en facteurs irréductibles pour le calcul du PGCD

Proposition. Soit P, Q deux polynômes non nuls, que l'on décompose en facteurs irréductibles :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{m_i} \text{ et } Q = \mu \prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$$

Les P_i sont supposés irréductibles, unitaires, deux à deux distincts et les m_i, n_i sont des entiers éventuellement nuls. Alors :

$$\text{pgcd}(P, Q) = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\text{Min}(m_i, n_i)}$$

Proposition. Soit P, Q deux polynômes non nuls, que l'on décompose en facteurs irréductibles. Alors P et Q sont premiers entre eux si et seulement s'il n'ont aucun facteur irréductible commun.

4 Annexes

4.1 PPCM de deux polynômes

Remarque. *La notion de PPCM est beaucoup moins utilisée que celle de PGCD.*

Définition. Soit A, B deux polynômes non nuls. Alors $I = (A) \cap (B)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc il existe un unique $M \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que :

$$(A) \cap (B) = (M)$$

On l'appelle **PPCM de A et B**, et on le note $A \vee B$.

Proposition. Avec les mêmes notations, en notant $D = A \wedge B$, les deux polynômes AB et MD sont associés, c'est-à-dire égaux à un coefficient multiplicatif non nul près.

Proposition. Soit P, Q deux polynômes non nuls, que l'on décompose en facteurs irréductibles :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{m_i} \text{ et } Q = \mu \prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$$

Les P_i sont supposés irréductibles, unitaires, deux à deux distincts et les m_i, n_i sont des entiers éventuellement nuls. Alors :

$$\text{ppcm}(P, Q) = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\text{Max}(m_i, n_i)}$$

4.2 PGCD de plus de deux éléments

Définition. Soit $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls. Considérons :

$$\begin{aligned} I &= (A_1) + (A_2) + \cdots + (A_p) \\ &= \{A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_pU_p, \\ &\qquad\qquad U_1, \dots, U_p \in \mathbb{K}[X]\} \end{aligned}$$

Alors I est un idéal non nul de A, donc il existe un unique polynôme unitaire D tel que $I = (D)$. On l'appelle le **PGCD** de $(A_1, \dots, A_p)$.

Proposition. Les diviseurs communs à tous les A_i sont les diviseurs de D :

$$\Big(\forall i,\ P \mid A_i\Big) \iff D \mid \text{pgcd}(A_1, \dots, A_p)$$

Associativité.

$$\begin{aligned} &\text{pgcd}(A_1, \dots, A_p, A_{p+1}) \\ &\qquad = \text{pgcd}(\text{pgcd}(A_1, \dots, A_p), A_{p+1}) \end{aligned}$$

Définition. Les polynômes $A_1, \dots, A_p$ sont **premiers entre eux** (dans leur ensemble) lorsque $\text{pgcd}(A_1, \dots, A_p) = 1$.

Théorème de Bézout.

> $A_1, \dots, A_p$ sont **premiers entre eux** si et seulement s'il existe $U_1, \dots, U_p$ tels que :
>
> $$A_1U_1 + \cdots + A_pU_p = 1$$

Remarque. *Attention, des polynômes peuvent être premiers entre eux dans leur ensemble, sans être premiers entre eux deux à deux.*

Exemple. Donner le PGCD de $(X - 2)(X - 3)$, $(X - 2)(X - 5)$ et $(X - 3)(X - 5)$.

4.3 Annexe : méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

```
# -*- coding:utf-8 -*-

from numpy.polynomial import Polynomial
X = Polynomial([0, 1])
P = 3*X**6 + 2*X**5 -8*X**3 + X**2 + 30*X + 11
a = P.coef
print(a)
# [11. 30. 1. -8. 0. 2. 3.]

print(P(-2))
# 147.0

def evalue(a, t):
    """renvoie la valeur P(t) où P est le polynôme
       dont les coefficients sont dans a"""
    n = len(a)-1
    puiss = 1
    s = a[0]
    for k in range(0,n):
        # en entrée de boucle, puiss est t^k,
        # s est \sum_{i=0}^{k} a_i t^i
        puiss *= t
        s += a[k+1] * puiss
    return s

print(evalue(a,-2))
# 147.0

def evalue2(a, t):
    """renvoie la valeur P(t) où P est le polynôme
       dont les coefficients sont dans a
       par la méthode de Horner """
    n = len(a)-1
    s = a[n]
    for k in range(0,n):
        # en entrée de boucle, s est
        # a_n t^k + a_{n-1} t^{k-1} + ... + a_{n-k+1} t + a_{n-k}
        # c'est-à-dire \sum_{i=0}^{k} a_{n-i} t^{k-i}
        s *= t
        s += a[n-k-1]
    return s

print(evalue2(a,-2))
# 147.0

# avec cette seconde fonction,
# le nombre de multiplications a été divisé par
2.
```

4.4 Rappel : interpolation de Lagrange

Théorème.

> Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ supposés deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :
> $$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ P(\alpha_i) = y_i$$

Preuve. On introduit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

- L'évaluation en α_i est linéaire, donc φ est une application linéaire.
- Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et s'annule en $(n+1)$ points distincts, donc $P = 0$. On a montré que φ est injective.
- Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$, on en déduit que φ est bijective.

□

Exercice. Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :
$$L_i(\alpha_i) = 1 \text{ et } L_i(\alpha_j) = 0 \text{ pour } j \neq i$$
2. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, dans cette base.
4. En déduire une autre démonstration du théorème précédent.

Solution.

1. Il y a une ambiguité dans la formulation de la question. Est-ce qu'il faut justifier cette unicité ?

M1 Posons $L_i(X) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - \alpha_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\alpha_i - \alpha_k)}$.

On remarque que les L_i conviennent.

M2 **Analyse.** Supposons que L_i convienne. On sait que les $(\alpha_k)_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\k\neq i}}$ sont n racines distinctes de L_i de degré $\leqslant n$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - \alpha_k)$$
Et comme $L_i(\alpha_i) = 1$, c'est que :
$$\lambda = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\alpha_i - \alpha_k)}$$
Cela justifie l'unicité sous réserve d'existence, et donne l'expression (potentielle) de $L_i(X)$.

Synthèse. Posons $L_i(X) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X-\alpha_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k)}$.

Ils sont bien de degré $\leqslant n$, et satisfont la propriété $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$.

2. - Montrons que $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre.
   Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\underbrace{\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n}_{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i} = 0$$

En évaluant ce polynôme en α_j, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(\alpha_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{ij} \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

ce qui est vrai pour tout j, ce qui montre la liberté.

   - Comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille libre à $n+1$ éléments dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$, c'est une base.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On cherche $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$

En évaluant ce polynôme en α_j, on obtient :

$$P(\alpha_j) = \lambda_j$$

de sorte que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) L_i$$

Remarque. *On a en particulier :*

$$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$$

4. On sait que l'application qui, à un vecteur d'un e.v. de dimension finie, associé ses coordonnées dans une base fixée, est un isomorphisme.

□

4.5 Rappel : polynômes scindé

Définition. Un polynôme P est dit **scindé** lorsque tous les polynômes irréductibles qui figurent dans sa décomposition sont de degré 1 :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Proposition. P est scindé si et seulement si le nombre de ses racines, comptées avec multiplicité, est égal à $\deg(P)$.

Théorème de d'Alembert-Gauss.

> Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Proposition. Dans $\mathbb{C}[X]$, $A \mid B$ si et seulement si, pour tout racine a de A de multiplicité m, a est racine de B avec un multiplicité $\geqslant m$.

Proposition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P de multiplicité m. Alors $\overline{z}$ est racine de P de multiplcité m.

4.6 Rappel : relations coefficients-racines

Proposition. Soit

$$P = aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$$

un polynôme scindé de degré 2, $a \neq 0$. Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Proposition. Si x_1, x_2 satisfont $\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$ alors ce sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$.

Définition. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme scindé, $x_1, \ldots, x_n$ ses racines (répétées si elles sont multiples). On appelle **fonctions symétriques élémentaires de** $x_1, \ldots, x_n$ les quantités :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1} &= x_1 \ldots x_{n-1} + x_1 \ldots x_{n-2} x_n + \cdots + x_2 \ldots x_{n-1} \\ \sigma_n &= x_1 \ldots x_n \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\sigma_k = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\} \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$$

Remarque. *Ce sont des fonctions symétriques : si on mélange les x_i, on ne change pas les σ_k.*

Remarque. *σ_k est la somme de tous les produits de k termes pris parmi $x_1, \ldots, x_n$.*

Théorème.

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Remarque. *Il faut savoir retrouver :*

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Relations coefficients-racines

13.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

(a) Déterminer le coefficient dominant et le degré de P.

(b) Montrer que les racines complexes de P sont des racines simples.

(c) Préciser le produit et la somme des racines de P.

(d) Déterminer explicitement les racines de P.

Autour des racines n-ièmes de l'unité

13.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercices du CCINP

13.3 CCINP 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

13.4 CCINP 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

13.5 CCINP 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercices

13.6

(a) Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{10} + X^5 + 1$.

(b) Montrer que $X^3 - X^2 + 1$ et $X^2 - 2X + 2$ sont premiers entre eux.

13.7

Soit λ, μ deux éléments distincts de $\mathbb{K}$, et $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Exprimer en fonction de P le reste de la division de P par $(X-\lambda)(X-\mu)$.

(b) Exprimer en fonction de P le reste de la division de P par $(X-\lambda)^2$.

13.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

13.9

Déterminer les polynômes P vérifiant :

$$P(X+1) = P(X)$$

13.10

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers, tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

(a) On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

(b) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = 2X^3 - X^2 - X - 3$$

Petits problèmes d'entrainement

13.11

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer le PGCD des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X-1)^n$.

(b) Montrer l'existence de U, V polynômes tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X-1)^3 V = (X-1)$$

et déterminer explicitement de tels polynômes.

13.12

Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{N}^*$:

$$b \mid a \iff X^b - 1 \mid X^a - 1$$

13.13

Soit P un polynôme réel non constant.

(a) On suppose que P est scindé à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé.

(b) Montrer que le résultat perdure même si les racines de P ne sont pas simples.

(c) Le polynôme $X^6 - X + 1$ est-il scindé sur $\mathbb{R}$?

13.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$$

(a) Soit $x \in [-1, 1]$. Simplifier les expressions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$.
Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$, et donner $f_3(x)$.

(b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1, 1]$.

(c) Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

(d) Montrer que T_n possède n racines distinctes, toutes dans $]-1, 1[$.

13.15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\big((X^2 - 1)^n\big)$$

(a) Montrer que L_n est un polynôme unitaire, de degré n.

(b) Vérifier que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} L_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

(c) En déduire que L_n possède n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

13.16

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2ina}$.

(a) Déterminer les racines du polynôme P_n, ainsi que leurs multiplicités.

(b) En déduire la valeur de :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

13.17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$P(X) - X \mid P(P(X)) - X$$

13.18

Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$$

13.19

On veut montrer que π est irrationel. On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$P_n = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n \text{ et } I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t \,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0.

(b) Établir la même propriété en $\pi = \dfrac{a}{b}$.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_n$ tend vers 0.

(d) Conclure en observant que I_n est un entier.

13.20

Soit $n \in \mathbb{N}$. En étudiant la dérivée n-ème de X^{2n}, établir :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

13.21

On considère la suite de polynômes $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n$$

(a) Vérifier que, pour tout n, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{k+n} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n$$

On fixe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que :

$$F_{a+b} \wedge F_b = F_a \wedge F_b$$

(d) Conclure :

$$F_a \wedge F_b = F_{a\wedge b}$$