

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Cours	2
1 Congruences	2
1.1 Définition	2
1.2 Compatibilité avec les lois	2
1.3 Le petit théorème de Fermat	2
2 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	2
2.1 Complément : ensemble quotient	2
2.2 L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	2
2.3 Structure d'anneau	3
2.4 Calcul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	3
3 Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	4
4 Le théorème chinois	5
4.1 Présentation du problème chinois	5
4.2 Structure d'anneau produit	5
4.3 À propos de la notation	5
4.4 Le théorème chinois	6
5 Indicatrice d'Euler	6
6 Annexes	7
6.1 Démonstrations du petit théorème de Fermat	7
Exercices	8
Exercices du CCINP	8
Exercices	8
Petits problèmes d'entraînement	9

1 Congruences

1.1 Définition

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on dit que a est **congru à b modulo n** si et seulement si $n \mid b - a$.
On note $a \equiv b [n]$ ou parfois $a \equiv b \pmod{n}$.

Proposition. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

1.2 Compatibilité avec les lois

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{array} \right\} \implies a + c \equiv b + d [n]$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{array} \right\} \implies ac \equiv bd [n]$$

Corollaire. Si $a \equiv b [n]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv b^k [n]$.

Exemple. Justifier le critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres dans l'écriture en base 10 est divisible par 3.

1.3 Le petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier, a un entier non multiple de p . Alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

2 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2.1 Complément : ensemble quotient

Définition. Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . Pour $x \in X$, on appelle **classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$** , et on note $\bar{x}$, l'ensemble des éléments $y \in X$ tels que $y \mathcal{R} x$:

$$y \in \bar{x} \iff y \mathcal{R} x$$

Proposition. Si $y \in \bar{x}$, alors $\bar{y} = \bar{x}$. On dit que y est un **représentant de la classe d'équivalence $\bar{x}$** .

Proposition. Les classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$ forment une partition de X : elles sont non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est X .

2.2 L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition. Soit $n \geq 2$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n .

Exemple. Pour $n = 2$, on a :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{I, P\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

Proposition. Soit $n \geq 2$. L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble à n éléments, que l'on peut décrire ainsi :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Remarque. La description donnée ci-dessus n'est pas la seule possible. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} &= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\} \\ &= \{\overline{-3}, \overline{-2}, \overline{-1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}\end{aligned}$$

2.3 Structure d'anneau

Rappel. Pour $n \geq 2$, il existe une unique loi de groupe sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, encore notée $+$, pour laquelle l'application $k \mapsto \overline{k}$ soit un morphisme de groupes, i.e. :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Remarque. Si l'on considère $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que l'on veut parler de $x + y$, on envisage donc $a, b \in \mathbb{Z}$ qui sont des représentants des classes d'équivalence x et y : $\overline{a} = x$ et $\overline{b} = y$. Alors :

$$x + y = \overline{a+b}$$

Proposition. Pour $n \geq 2$, il existe une unique loi interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notée $\times$, pour laquelle l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\mapsto \overline{k}\end{aligned}$$

vérifie :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \overline{a \times b} = \overline{a} \times \overline{b}$$

Alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, dont l'unité est $\overline{1}$.

Exemple. Dresser la table d'addition de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Remarque. Notons bien que :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\mapsto \overline{k}\end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sur l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

2.4 Calcul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Remarque. On travaille dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n \geq 2$.

Pour $k, a \in \mathbb{Z}$, que représentent :

$$k\overline{a}, \overline{ka} \text{ et } \overline{k}\overline{a}$$

Exemple. Est-ce que l'écriture suivante, dans l'anneau $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, a du sens ?

$$\overline{15} \times (\overline{3})^{-1} = \overline{5}$$

Remarque. On évite de dire : « soit $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ », mais plutôt : « soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et a un représentant de x , c'est-à-dire tel que $x = \overline{a}$. »

En particulier, si on définit :

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

on peut vouloir écrire $\overline{a} \mapsto f(a)$, c'est-à-dire définir $f(x)$ en utilisant un représentant de x . Mais il faut bien justifier qu'alors, la définition est indépendante du choix du représentant :

$$\overline{a} = \overline{b} \implies f(a) = f(b)$$

Exemple. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, l'équation :

$$x^2 - \bar{6}x + \bar{5} = \bar{0}$$

Exemple. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$, l'équation :

$$x^2 - \bar{11}x - \bar{1} = \bar{0}$$

Exemple. Discuter, suivant les valeurs de $a \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2 + x + a = \bar{0}$$

Proposition. Pour p premier, calculer $\text{Card}(A)$ où :

$$A = \{x^2, x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\}$$

3 Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème.

Soit n entier, $n \geq 2$. Les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les classes $\bar{k}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$ est premier avec n .

Remarque. Ce sont les générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Définition. On note $\varphi(n)$ le nombre d'inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$:

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{k \in \{0, \dots, n-1\}, k \wedge n = 1\})$$

φ s'appelle l'**indicatrice d'Euler**.

Remarque. On convient que $\varphi(1) = 1$.

Théorème d'Euler.

Soit $n \geq 2$. Si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.

Remarque. Lorsque n est premier, on reconnaît le petit théorème de Fermat.

Théorème.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps ;
- (ii) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre ;
- (iii) n est premier.

Notation. Pour p nombre premier, on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4 Le théorème chinois

4.1 Présentation du problème chinois

Exemple.

1. Déterminer une relation de Bézout entre 14 et 25.
2. Déterminer x_1 et x_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 1 [14] \\ x_1 \equiv 0 [25] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 \equiv 1 [14] \\ x_2 \equiv 0 [25] \end{cases}$$

3. Utiliser x_1 et x_2 pour déterminer une solution du système :

$$\begin{cases} x \equiv 2 [14] \\ x \equiv 3 [25] \end{cases}$$

4. Déterminer toutes les solutions du système précédent.

Remarque. Pourquoi le système :

$$\begin{cases} x \equiv 2 [26] \\ x \equiv 3 [38] \end{cases}$$

n'a pas de solution ?

4.2 Structure d'anneau produit

Définition. Soit $(A, +, *)$ et $(B, +, \star)$ deux anneaux. On définit l'**anneau produit** en munissant le produit cartésien $A \times B$ des lois :

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') &= (a + a', b + b') \\ (a, b) \times (a', b') &= (a * a', b \star b') \end{aligned}$$

Proposition. Muni de cette structure, $A \times B$ est un anneau.

Remarque. On peut étendre cette définition et cette proposition au cas d'un nombre fini d'anneaux.

4.3 À propos de la notation

Remarque. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ l'élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est la classe de a . Mais si on travaille à la fois dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, la notation devient ambiguë.

Notation. Pour $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$, on note :

$$(a \bmod n) \text{ ou } [a]_n$$

la classe de a modulo n , que l'on note aussi $\bar{a}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple. Préciser le diagramme de l'application :

$$\phi : a \mapsto (a \bmod 14, a \bmod 25)$$

Est-ce un morphisme d'anneaux ?

Quel est son noyau ?

4.4 Le théorème chinois

Théorème chinois.

Soit m, n entiers ≥ 2 , premiers entre eux. Alors l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a \bmod mn &\mapsto (a \bmod m, a \bmod n)\end{aligned}$$

est correctement définie, et est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque. Si l'on dispose d'une relation de Bézout :

$$mu + nv = 1$$

l'isomorphisme réciproque est :

$$(a \bmod m, b \bmod n) \mapsto (anv + bmu \bmod mn)$$

Corollaire. Soit m, n entiers ≥ 2 , premiers entre eux. Alors le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

admet au moins une solution $x_0 \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est $x_0 + mn\mathbb{Z}$.

Généralisation. Soit $n_1, \dots, n_k$ entiers ≥ 2 , deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/(n_1 \dots n_k)\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \\ a \bmod n_1 \dots n_k &\mapsto (a \bmod n_1, \dots, a \bmod n_k)\end{aligned}$$

est correctement définie, et est un isomorphisme d'anneaux.

Exemple. Résoudre le système de congruences :

$$\begin{cases} n \equiv 4 \pmod{5} \\ n \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

5 Indicatrice d'Euler

Rappel. Pour $n \geq 2$, $\varphi(n)$ désigne le nombre d'inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, ou encore le nombre d'entiers premiers avec n parmi $\{0, \dots, n-1\}$, ou encore le nombre de générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Théorème d'Euler. Soit n entier, $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$. Si a est premier avec n , alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Corollaire (petit théorème de Fermat). Soit p un nombre premier. Pour tout a non multiple de p , $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Théorème.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Si m et n sont premiers entre eux, alors :

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

Proposition. Si p est premier et $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

Théorème.

Soit $n \geq 2$ un entier. On a :

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exemple. Calculer $\varphi(36)$.

6 Annexes

6.1 Démonstrations du petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier, a un entier non multiple de p . Alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

Première preuve.

On note k l'ordre de $\bar{a}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$:

$$a^k \equiv 1 [p]$$

Mais l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe : $k \mid p-1$. Donc il existe q tel que $kq = p-1$. En élevant à la puissance q la relation précédente, on a donc $(a^k)^q \equiv 1^q [p]$, c'est-à-dire :

$$a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

□

Deuxième preuve.

L'application $x \mapsto \bar{a}x$ est une permutation de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \prod_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x &= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \bar{a}x \\ &= \bar{a}^{p-1} \prod_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x \end{aligned}$$

et donc, comme $\prod_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x$ admet un inverse (car non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps), on en déduit :

$$\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$$

□

Troisième preuve.

- Tout d'abord, pour tout $a \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (a+1)^p &= a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \\ &\equiv a^p + 1 [p] \end{aligned}$$

car $p \mid \binom{p}{k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

En effet :

$$k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$$

donc $p \mid k \binom{p}{k}$ avec p et k premiers entre eux, donc $p \mid \binom{p}{k}$ par le lemme de Gauss.

- On raisonne alors par récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $a = 1$, on a bien-sûr $a^p \equiv a [p]$.
- On suppose que $a^p \equiv a [p]$. Alors

$$\begin{aligned} (a+1)^p &\equiv a^p + 1 [p] \text{ par le point précédent} \\ &\equiv a + 1 [p] \text{ par hyp. de récurrence} \end{aligned}$$

- On a montré, par récurrence que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, a^p \equiv a [p]$$

- Si $b = -a \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$\begin{aligned} b^p &= (-a)^p \\ &= -a^p \\ &\equiv -a [p] \\ &\equiv b [p] \end{aligned}$$

- On a donc $p \mid a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Or p est premier et a n'est pas multiple de p , donc a et p sont premiers entre eux. Par le lemme de Gauss, on a donc :

$$p \mid a^{p-1} - 1$$

□

Exercices du CCINP

140.1

 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.

(a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

140.2

 94

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 5 & [6] \\ x \equiv 4 & [8] \end{cases}$$

n'a pas de solution x appartenant à $\mathbb{Z}$.

2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
(b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

- (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
- (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .
On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0 .

Exercices

140.3

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + x + 3 = 0$$

140.4

Résoudre l'équation :

$$x^2 = \bar{1}$$

- (a) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
- (b) dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

140.5

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

- (a) $6x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$;
- (b) $6x + 2 \equiv 0 \pmod{10}$;
- (c) $6x + 2 \equiv 0 \pmod{9}$.

140.6

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 5 & [17] \\ x \equiv 4 & [6] \end{cases}$$

140.7

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$(a) \begin{cases} x \equiv 2 & [5] \\ x \equiv 3 & [9] \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 9x \equiv 3 \pmod{21} \\ 5x \equiv 2 \pmod{8} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

140.8

Soit p premier, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \wedge (p-1) = 1$. Montrer que :

$$f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x \mapsto x^k$$

est bijective.

140.9

Pour n entier naturel impair, calculer :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x$$

140.10

Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/69\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$?

Petits problèmes d'entraînement**140.11**

(a) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le système :

$$\begin{cases} x + y \equiv 4 \pmod{11} \\ xy \equiv 10 \pmod{11} \end{cases}$$

(b) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le système :

$$\begin{cases} x + y \equiv 4 \pmod{341} \\ xy \equiv 10 \pmod{341} \end{cases}$$

140.12

(a) Écrire, sous forme de fraction réduite :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ puis } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

On considère p un nombre premier différent de 2.

(b) Montrer que $x \mapsto x^{-1}$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sur lui-même.

(c) Montrer que $\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x^{-1} = \overline{0}$.

(d) On écrit :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$$

où a et b sont entiers et premiers entre eux.

Utiliser la question précédente pour montrer que $p \mid a$.

On va justifier le résultat par une autre méthode.

(e) Montrer que les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sont les racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ du polynôme $X^{p-1} - \overline{1}$.

(f) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p-1} \overline{j} \right)$$

puis retrouver le résultat : $p \mid a$.

140.13

Soit p un nombre premier.

(a) Quels sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ égaux à leur inverse ?

(b) En déduire que p divise $(p-1)! + 1$.

(c) Réciproquement, montrer que si $n \geq 2$ divise $(n-1)! + 1$, alors n est premier.

140.14

Soit $p \geq 3$ un nombre premier.

- (a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$:

$$p \mid \binom{p}{k}$$

- (b) En déduire que $f : \bar{x} \mapsto (\bar{x})^p$ est un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- (c) En déduire le petit théorème de Fermat :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (\bar{k})^p = \bar{k}$$

140.15

On note G l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

- (a) Énumérer les éléments de G .
- (b) Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

140.16

Pour $p \geq 3$ premier, calculer :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^2$$

140.17

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$.

- (a) On suppose $a \wedge n = 1$. Montrer que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.
- (b) On suppose $a^{n-1} \equiv 1 [n]$ et $a^d \not\equiv 1 [n]$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ diviseur strict de $n-1$. Montrer que n est un nombre premier.

140.18

Soit a, n entiers ≥ 2 . On pose $N = a^n - 1$. Montrer que :

$$n \mid \varphi(N)$$

140.19

Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\varphi(n)$ est pair.

140.20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Soit $d \in \mathbb{N}$ un diviseur de n . Dénombrer les $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $k \wedge n = d$.
- (b) En déduire que :

$$n = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 0}} \varphi(d)$$

140.21

Montrer que, pour tout $n \geq 3$:

$$\varphi(n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(n) + \ln(2)}$$

140.22

On note $T = (t_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice où :

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale :

$$D = \text{Diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$$

où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

- (a) Exprimer le coefficient en position (i, j) de $T^\top D T$ en fonction de $i \wedge j$.
- (b) En déduire la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 \wedge 1 & 1 \wedge 2 & \dots & 1 \wedge n \\ 2 \wedge 1 & 2 \wedge 2 & \dots & 2 \wedge n \\ \vdots & & & \vdots \\ n \wedge 1 & n \wedge 2 & \dots & n \wedge n \end{vmatrix}$$