

CONCOURS D'ADMISSION DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
FILIÈRE M-MP/M-MPI – SESSION 2025
ÉPREUVE ORALE MATHS LYON
RAPPORT DU JURY

LOÏC DE RAPHÉLIS, ANTOINE JEGO, MICKAËL LATOCCA & LÉO POYETON

Nous avons examiné cette année 317 candidates et candidats. Nous discutons ici du déroulement de l'épreuve, rappelons certains principes importants, commentons la répartition des notes et donnons enfin quelques-uns des énoncés.

1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

1.1. Conditions de l'épreuve. L'épreuve dure 45 minutes, sans préparation préalable, avec un jury composé d'une seule personne. Après émargement et vérification de la pièce d'identité, l'examineur énonce le texte suivant :

Je vais vous dicter l'énoncé d'un exercice. Ensuite vous pourrez y réfléchir et quand vous le souhaitez, me faire part de votre démarche. En effet, l'exercice peut être difficile, donc c'est votre démarche plus que la résolution qui sera évaluée lors de cet oral.

L'énoncé est ensuite dicté et l'oral commence. Exceptionnellement, un des exercices dont l'énoncé était long a été donné sur une feuille de papier : dans ce cas, il a été lu et recopié au tableau par le candidat.

Le jury ne s'autorise à intervenir qu'après 10 à 15 minutes, s'il l'estime nécessaire.

Contrairement aux années précédentes, les différents oraux ont eu lieu dans de nombreuses salles : Salles Lettres 1,2 et 3 lors de la première série, Salles Noether, Bourbaki, Cartan 1 et 2 lors de la deuxième série, et salles W, T8, T19, T20 lors de la troisième série.

Les salles T8, T19 et T20 ne disposent que d'un tableau de taille réduite. Nous avons fait en sorte d'accompagner les candidates et candidats dans leur gestion du tableau, de sorte à ne pas les pénaliser par rapport aux candidates et candidats des autres séries. Il est néanmoins recommandé aux futures candidates et futurs candidats qui seraient convoqués dans ces salles lors de sessions ultérieures de se préparer à écrire l'énoncé bien en haut à gauche du tableau.

Par ailleurs, ces salles étant exposées à la chaleur, il est conseillé aux futures candidates et futurs candidats de choisir une tenue appropriée, qui ne les pénalisera pas (le jury ne s'offusquera pas de voir des candidates et candidats en short ou t-shirt).

1.2. Critères d'évaluation. Les critères principaux sont :

- la maîtrise du cours dans sa profondeur et son application ;
- la capacité à s'approprier l'exercice et ses spécificités ;
- la capacité à adopter une bonne démarche de recherche, autonome ;
- la capacité à se corriger, à prendre du recul sur les pistes explorées et à en proposer de nouvelles ;
- la réactivité aux remarques et indications du jury.

1.3. Niveau des candidates et candidats. Le niveau général des candidates¹ est élevé et celui-ci a été très apprécié par les examinateurs. Certaines candidates ont particulièrement impressionné le jury, en se forgeant rapidement une intuition sur des problèmes difficiles et en mettant ensuite en place leur stratégie de résolution de la façon la plus efficace qu'il soit.

De façon générale, la persévérance paie : certaines candidates, reconnaissant elles-mêmes leur manque d'intuition quant à l'exercice donné, ont continué de chercher une solution et à proposer des pistes. Elles en ont été récompensées lors de l'évaluation.

Le jury a apprécié les prestations qui commençaient par une étude fine des hypothèses de l'exercice, après un éventuel temps de réflexion. Il a également apprécié les prestations lors desquelles les candidates essayaient des pistes en les justifiant, et savaient revenir en arrière lorsque celles-ci s'avéraient infructueuses.

1.4. Cadre du programme. Le programme est presque toujours maîtrisé, mis à part parfois certains points :

- Plusieurs candidats n'ont pas su étudier efficacement une suite récurrente réelle du type " $x_{n+1} = f(x_n)$ ". Certains n'ont fait aucun dessin ou lorsque c'était le cas n'ont montré aucune application dans la réalisation de celui-ci, pourtant d'une importance cruciale dans ce genre d'étude.
- Des arguments de densité polynomiale ont été parfois difficiles à mettre en place. Nous avons par exemple été surpris que le résultat suivant n'ait pas sauté aux yeux de certains candidats : "une fonction continue f vérifiant $\int_0^1 fg = 0$ pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ est nécessairement nulle sur $[0; 1]$ ".
- Le jury a été étonné d'observer un candidat ne pas savoir résoudre en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le système d'équations donné par $x + y = a$ et $x^2 + y^2 = b$, ce qui est pourtant élémentaire.

Enfin, les candidats ne doivent pas supposer que la maîtrise de notions hors-programme est attendue de leur part. Les exercices sont pensés et construits pour être résolus dans le cadre du programme. Tout usage de résultats hors-programme doit être justifié.

Cette année encore, le jury rappelle qu'invoquer la réduction de Jordan dans le cadre d'un exercice sans savoir la démontrer est contre-productif. De même, on ne s'attend pas à ce qu'un candidat sache déterminer l'expression des racines réelles d'une équation polynomiale de degré 3 ou 4 ; et il ne faut donc pas croire que l'on est bloqué par son ignorance dans une telle situation.

1.5. Remarques et conseils. Voici quelques conseils généraux qui s'appuient sur les critères d'évaluations évoqués précédemment, ainsi que quelques remarques sur ce que nous jugeons inadéquat lors de l'oral.

- Rappelons pour commencer qu'il s'agit d'un oral et non d'un écrit. Le jury ne cherche pas à vérifier que les récurrences sont écrites avec le niveau attendu lors d'un écrit. L'oral permet une conversation dynamique et permet à l'examineur de demander des précisions sur certains points (et pas d'autres). Il n'est pas nécessaire de détailler excessivement les calculs au tableau : un argument oral bien trouvé est préféré.
- Néanmoins, il nous semble très important de rappeler que c'est aux candidates de rendre leurs raisonnements clairs et de faire en sorte que l'examineur le suive. Certaines candidates ont retourné la charge de la vérification à l'examineur, dont le rôle n'est pas d'essayer de se convaincre si oui ou non l'idée est correcte, et si une erreur s'est glissée dans le raisonnement.
- De nombreux exercices appellent à étudier des exemples ou des cas particuliers significatifs, quitte à renforcer certaines hypothèses de l'énoncé tout en gardant une partie de la difficulté de l'exercice. Par exemple, lorsqu'un exercice contient le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$ dans son énoncé, il peut être bienvenu de chercher à déterminer ce groupe. De même, lorsqu'un exercice propose

1. Nous avons choisi d'alterner les genres du mot "candidat"/"candidate" à chaque paragraphe dans lequel le terme apparaît. Tous deux doivent donc être interprétés comme étant de genre neutre dans ce rapport.

de déterminer des fonctions *continues* qui semblent vérifier une certaine égalité différentielle, il peut être profitable de supposer la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ afin de mener les calculs que l'on voudrait pouvoir effectuer, et ainsi se forger une intuition.

- Le jury regrette que certaines candidates se lancent tête baissée dans des calculs ou une preuve de ce qu'on leur demande sans avoir de plan ou de démarche en tête. D'autres ne semblent pas chercher à exploiter les spécificités de l'exercice, telles que les différents objets qui apparaissent dans l'énoncé ; et prendre le temps de se forger une intuition leur semble superflu. Ceci est d'autant plus regrettable qu'elles sont prévenues que l'exercice est potentiellement difficile et que c'est leur démarche qui va être évaluée.
- Plusieurs exercices peuvent être abordés en renforçant les hypothèses ou en traitant des cas particuliers qui donnent de l'intuition, par exemple en commençant par les petites dimensions. Dans certains cas, le traitement d'un seul exemple bien choisi donne toutes les idées nécessaires à la résolution générale.
- Il ne faut pas être réfractaire au calcul, alors que dans de nombreux cas, celui-ci donne la solution, ou au moins des idées. Pour autant, il ne faut pas tenter des approches excessivement calculatoires sans avoir évalué leur pertinence, celles-ci étant alors bien souvent vouées à l'échec (e.g. avec coefficients indéterminés dans des matrices de taille 3 ou plus).
- Certaines candidates nous ont demandé si elles devaient parler dès le début de l'épreuve. Nous n'avons pas de préférence a priori, tant que ce qui est dit est pertinent, ou en tout cas, nous éclaire sur la démarche envisagée. Il faut toutefois se garder de tout excès (voir les deux points suivants).
- Les exercices étant souvent difficiles, il n'est pas attendu qu'ils soient résolus sans aide. Néanmoins, nous valorisons la prise d'initiative et la combativité. Une fois passé un temps initial de réflexion, il est important de proposer des pistes de réflexion. Il est important également d'expliquer sa démarche de recherche de résolution.
- À l'inverse, il n'est pas souhaitable non plus de parler en continu, et de donner voix à toutes ses réflexions internes sans avoir évalué au préalable leur pertinence.
- Le fait de *sonder* l'examinateur en proposant plusieurs pistes et en observant la réaction de celui-ci n'est vraiment pas apprécié. Il ne vaut mieux pas non plus demander explicitement à l'examinateur une indication, quand celle-ci sera de toute façon donnée en temps voulu si l'examinateur le juge nécessaire.
- Lorsque l'examinateur demande une précision, il est important de la donner, même si elle est simple. Elle est parfois faussement simple, ou carrément fausse ; cela permet alors à la candidate de se corriger.

2. RÉSULTATS

2.1. Distribution des notes. La distribution des notes des 317 oraux est donnée ci-dessous sous forme d'histogramme. La moyenne de la série de notes est 12.36, et son écart-type est 2.86. La note maximale de 20/20 a été donnée deux fois.

L'interprétation des notes se fait de la façon suivante :

- Défaillances majeures observées, ou absence complète d'initiative : 7 et en dessous.
- Oral laborieux, nécessitant une aide significative : 8, 9, 10.
- Oral montrant une autonomie limitée ou un manque de recul éventuel : 11, 12.
- Oral jugé correct : 13, 14.
- Bonne prestation, bonne autonomie et bon recul : 15, 16, 17.
- Excellente prestation : 18, 19, 20.

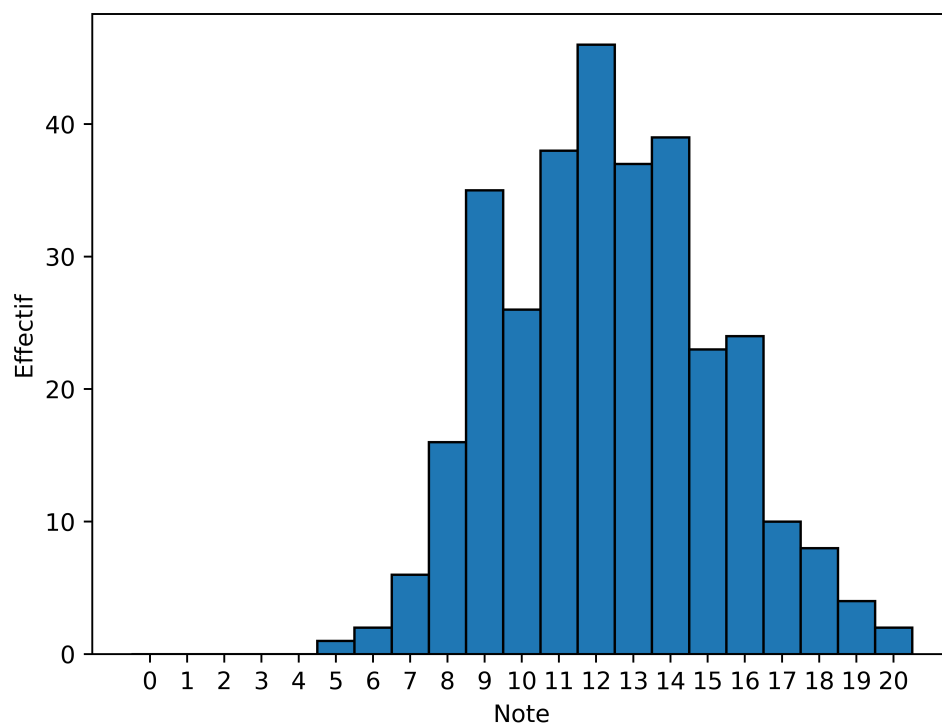


FIGURE 1. Histogramme des notes

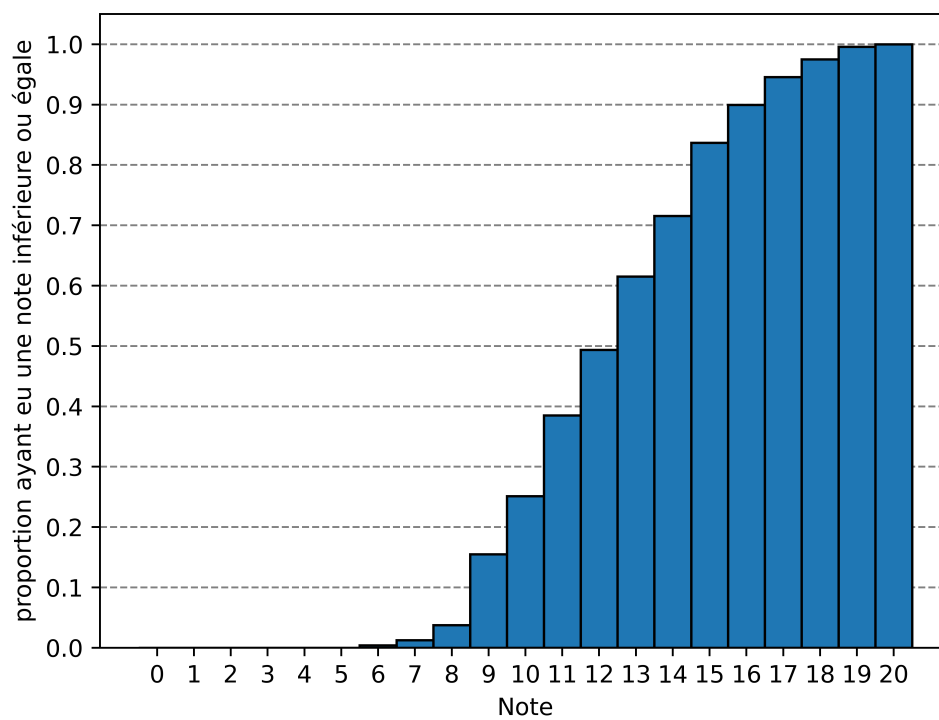


FIGURE 2. Fréquences cumulées croissantes

3. QUELQUES EXERCICES

Énoncé 1.

Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ qui vérifie la propriété suivante. Pour tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{U}_n$ il existe au plus $K \leq \frac{Cn}{|S|}$ racines n -ièmes de l'unité $z_k \in \mathbb{U}_n$, $k \in \{1, \dots, K\}$ telles que

$$\left| \bigcup_{k=1}^K z_k S \right| \geq \frac{n}{2}.$$

On rappelle la notation $zS = \{zs, s \in S\}$.

Énoncé 2.

Que peut-on dire d'une fonction $f \in C^0([1, 2], \mathbb{R})$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant pour tout $k \geq 0$,

$$\left| \int_1^2 t^k f(t) dt \right| \leq k^M.$$

Énoncé 3.

Montrer qu'un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs entières n'est pas d'aire le carré d'un entier.

Énoncé 4.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $[0, 1] \rightarrow (0, 1]$ qui converge simplement vers f .

(1) Pour tout $n \geq 2$, soit $T_n := \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{i}$. Montrer que $(T_n)_{n \geq 2}$ converge simplement vers f .

Dans le reste de l'exercice, nous supposons que pour tout $n \geq 1$, f_n est croissante et dérivable et

$$f'_n \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n \quad \text{où} \quad \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k.$$

(2) Dans cette question, on suppose que $\sup_{n \geq 1} \Sigma_n(1/2) < \infty$. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2})$, il existe $c_x > 0$ tel que pour tout n assez grand, $f_n(x) \leq e^{-c_x n}$.

(3) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que :

- Pour tout $x < x_0$, il existe $c_x > 0$ tel que pour tout n assez grand, $f_n(x) \leq e^{-c_x n}$;
- Pour tout $x > x_0$, $f(x) \geq x - x_0$. (On pourra utiliser la question 1. pour traiter ce cas)

Énoncé 5.

Soit $d \geq 1$ et notons pour $i = 1, \dots, d$, $e_i = (\delta_{i,j})_{j=1, \dots, d} \in \mathbb{Z}^d$. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, indépendantes et identiquement distribuées, avec

$$\mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}, \quad i = 1, \dots, d.$$

La marche aléatoire issue de 0 est la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 0}$ où

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1.$$

Notons

$$p_d = \mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0).$$

Montrer que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_d = 0.$$

On admettra que $p_d < 1$ dès que $d \geq 3$.

Énoncé 6.

Soit $(P_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}[X]$ une suite de polynômes telle que $P_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\deg(P_n - X^n) < n$.

(1) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) Il existe deux suites $(c_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^*$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$P_n = (X - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, \quad n \geq 1,$$

où par convention $P_{-1} = 0$.

(ii) Il existe une forme linéaire $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n, m \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}(P_n P_m) = 0 \text{ pour tout } n, m \geq 0 \text{ avec } n \neq m, \\ \mathcal{L}(P_n^2) \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(2) Supposons les deux assertions ci-dessus vraies et supposons de plus qu'il existe $u \in C^0([0, 1], (0, \infty))$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \mathcal{L}(P) = \int_0^1 P(x)u(x) \, dx.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n a n racines simples dans $[0, 1]$.

Énoncé 7.

Caractériser l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\int_0^{+\infty} e^{t^2 A} \, dt$ converge.

Énoncé 8.

Soit $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. Décrire les solutions $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $X' = AX - XA$. On pourra commencer par étudier le cas de la dimension 2.

Énoncé 9.

- (1) Quel est le cardinal minimal d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dont les éléments engendrent $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel ?
- (2) Est-ce que deux tels sous-groupes minimaux sont conjugués dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?
- (3) Reprendre (1) pour $n = 3$.

Énoncé 10.

- (1) Dénombrer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sur l'ensemble des automorphismes de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

On précise que l'ensemble des automorphismes d'un groupe G , que l'on note $\mathrm{Aut}(G)$, est constitué des isomorphismes de G sur lui-même. Il admet une structure de groupe pour la loi de composition.

- (2) Comment proposez-vous de généraliser le résultat précédent ?

Énoncé 11.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires réelles positives à valeurs dans un ensemble borné i.i.d.

Soit également M et N deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ bornées, indépendantes des suites $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

On suppose que pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}[f(X_k)] \leq \mathbb{E}[f(Y_k)] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[f(M)] \leq \mathbb{E}[f(N)].$$

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe,

$$\mathbb{E}[f(\sum_{k=1}^M X_k)] \leq \mathbb{E}[f(\sum_{k=1}^N Y_k)].$$

Énoncé 12.

Soit d un entier non-nul.

- (1) Déterminer pour quels entiers non-nuls n il existe $F_n \subset \mathbb{R}^d$ ensemble à n éléments, dont tous les sous-ensembles $G \subset F_n$ peuvent s'écrire sous la forme

$$G = \{x \in F_n \mid \langle w, x \rangle + b > 0\}$$

avec $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On pourra dans un premier temps chercher une interprétation géométrique de la question.

- (2) Pour quels entiers non-nuls n existe-t-il F_n un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ à n éléments, tel que pour tout $G \subset F_n$, il existe B_G une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ telle que $G = F_n \cap B_G$?