

## 17. Mathématiques

### 17.1. Introduction

L'épreuve consiste en un oral de trente minutes sans préparation. Le sujet est composé de trois questions de difficulté croissante. La première question consiste à énoncer un résultat de cours et éventuellement à en refaire une démonstration au tableau. La deuxième question demande davantage de réflexion mais reste de difficulté raisonnable. La dernière question est plus ardue et a vocation à tester les capacités d'analyse du candidat et son aptitude à dialoguer avec l'examineur. Quels que soient les obstacles rencontrés par le candidat, l'examineur lui fournit des indications pour l'aider à avancer. Il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour obtenir une excellente note et les indications données pour traiter une question difficile ne sont pas pénalisantes.

### 17.2. Analyse globale des résultats

L'évaluation a porté sur la connaissance des notions du programme et la capacité à les mobiliser pour résoudre des problèmes, ainsi que sur la clarté de l'exposé et l'aptitude à dialoguer avec l'examineur.

Le niveau général observé est très bon et la plupart des candidats connaissent bien le format de l'épreuve : un oral sans préparation.

Dans leur très grande majorité, les candidats ont montré une bonne connaissance des résultats de cours, ce qui rend toute lacune particulièrement pénalisante. En particulier, la première question, censée permettre au candidat de rentrer en douceur dans son épreuve, se transforme en question discriminante lorsqu'elle met au jour un manque de connaissances, et notamment du cours de première année, ou un manque de précision dans la manipulation des objets, ou dans la rigueur des raisonnements. Nous reviendrons sur ces points dans la suite de ce rapport.

Les notes les plus basses concernent les candidats présentant des lacunes importantes sur des notions directement liées au cours. Même s'ils ont pu répondre à un nombre significatif de questions au fil de l'oral, la quantité d'aide fournie par l'examineur reste déterminante et peut fortement les pénaliser. Les notes intermédiaires concernent les candidats qui connaissent les notions de cours mais qui ont, à des degrés divers, besoin d'indications pour avancer. Les notes les plus élevées ont été attribuées à des candidats à la fois rapides et faisant preuve d'une grande autonomie. Le jury tient notamment à féliciter les quelques étudiants brillants, capables de résoudre sans aide l'intégralité de leur planche d'oral avec un exposé d'une grande clarté.

### 17.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Le jury propose ici quelques conseils afin de permettre aux candidats d'améliorer leur prestation. Commençons par un aspect logistique : l'épreuve orale ne dure que trente minutes, de l'appel du candidat à sa sortie de la salle. Il est donc vivement recommandé de se présenter avec convocation et pièce d'identité déjà prêtes, afin de ne pas perdre de précieuses minutes dès le début.

### 17.3.1. Qualité de l'oral

L'épreuve étant orale, il n'est pas nécessaire de tout écrire au tableau : recopier le sujet, par exemple, constitue une perte de temps, sauf si cela aide réellement le candidat à s'approprier l'énoncé. En revanche, la clarté et la précision des arguments demeurent essentielles : ils doivent être convaincants et présentés de manière synthétique. Le tableau, outil central de l'oral, ne saurait être utilisé comme brouillon ni comme simple copie. On attend qu'il mette en évidence les éléments clés du raisonnement logique, tels que l'introduction des variables, les symboles d'implication ou d'équivalence, les quantificateurs et les prédicats de récurrence. Il est vivement recommandé d'organiser le tableau de façon systématique, par exemple en le structurant en trois colonnes. Malheureusement, certains candidats continuent d'adopter une présentation désordonnée, écrivant au centre du tableau puis comblant les espaces restants. Une telle pratique traduit un manque de méthode, difficilement compatible avec les exigences attendues d'un futur ingénieur.

Il est essentiel de commencer par lire attentivement l'énoncé. Y consacrer quelques minutes est tout à fait raisonnable. Mais après cette lecture, il faut rapidement engager le dialogue avec l'examineur. Or, trop de candidats se mettent à écrire longuement et silencieusement au tableau, comme dans un devoir écrit, jusqu'à ce que l'examineur doive les interrompre. De même, certains attendent une validation après chaque étape, ce qui nuit à la fluidité de l'exposé et fait perdre un temps précieux.

L'attitude générale pèse fortement dans l'évaluation. Un candidat dynamique, persévérant et qui verbalise ses idées, même lorsqu'elles sont incomplètes, bénéficie souvent de davantage de soutien qu'un candidat qui reste figé devant le tableau. En fin d'oral, où chaque minute compte, la différence est nette.

Il ne faut pas oublier qu'il s'agit avant tout d'un exercice de communication. Regarder l'examineur, parler distinctement et éviter les silences prolongés sont des éléments déterminants. Exprimer ses idées, même partielles, reste préférable à un mutisme prolongé : dans un oral sans préparation, il n'y a pas de « mauvaises pistes », pourvu qu'elles soient analysées et discutées. Ces moments révèlent la capacité d'initiative, de réactivité et d'inventivité des candidats. Enfin, il est vivement conseillé de tenir compte des indications de l'examineur. Elles peuvent nécessiter une reformulation, mais les ignorer totalement est rarement une stratégie payante.

### 17.3.2. Compétences mathématiques

Comme nous l'avons déjà signalé, le niveau général très bon a rendu toute lacune fortement pénalisante. Il ne faut pas hésiter à en donner un peu plus que demandé dans l'énoncé, mais sans excès, par exemple si on est amené à manipuler une série entière, donner quelques informations sur son rayon de convergence, ou encore justifier rapidement qu'un objet est bien défini, qu'il s'agisse d'une fonction définie par une intégrale, de l'exponentielle d'une matrice, d'un supremum...

Les interrogations portent aussi sur le programme de première année. On ne peut que conseiller aux futurs candidats d'en travailler les preuves élémentaires. D'une part, parce que les idées de ces preuves sont souvent une source d'inspiration pour des questions plus difficiles. D'autre part, parce qu'en les traitant rapidement le jour de l'oral, on garde un temps précieux pour les questions plus originales de l'énoncé, et ce sont celles-ci qui permettent d'obtenir les meilleures notes.

Il est tout à fait possible, et même parfois souhaitable, de donner des arguments à l'oral pour gagner du temps, mais la précision doit être de rigueur. L'exemple typique est celui des « croisances comparées », pour lequel on est en droit de demander précisément quel est l'énoncé utilisé et en quoi il peut s'appliquer.

Pour revenir sur les imprécisions mentionnées précédemment, elles ont été de différentes natures.

En algèbre, plusieurs confusions ont été relevées dans l'application des polynômes aux objets algébriques : présence inappropriée de  $\ker(P)$  dans le lemme des noyaux, confusion entre  $P(u(x))$  et  $P(u)(x)$ , ou encore évaluation de polynômes annulateurs sur des vecteurs. Des imprécisions fréquentes concernent également des notions fondamentales : oubli de la condition  $X \neq 0$  dans  $X^T A X > 0$  pour les matrices symétriques définies positives, omission du caractère non constant de  $P$  dans le théorème de d'Alembert-Gauss, ou encore l'unicité dans la division euclidienne. La définition de « racine simple d'un polynôme » n'a pas toujours été correctement donnée. De plus, le fait que les racines carrées d'un nombre complexe soient opposées n'a pas semblé évident pour certains candidats, ce qui a pu les mettre en difficulté lors de raisonnements sur les racines d'un polynôme.

La caractérisation du rang par l'extraction de matrices inversibles a également posé problème. Enfin, il est préoccupant de constater que même d'excellents candidats se sont trouvés déstabilisés lorsqu'il s'est agi de résoudre un système linéaire ou de calculer un polynôme caractéristique. La maîtrise de ces techniques élémentaires demeure pourtant indispensable.

En topologie et en analyse, on observe encore des confusions entre la définition et la caractérisation du rayon de convergence d'une série entière. La continuité de la comatrice a également posé problème, tant dans l'énoncé de la définition que dans la justification de la preuve. Plus largement, certains candidats peinent à fournir des arguments précis lorsqu'il s'agit de démontrer la continuité d'une application vectorielle. La question portant sur la sous-multiplicativité de la norme subordonnée à la norme euclidienne dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  a mis en difficulté l'ensemble des candidats. La manipulation des sommes à quatre indices, souvent notées avec des lettres identiques pour des indices différents, a conduit à des raisonnements confus.

En théorie des groupes, le calcul de la signature d'une permutation reste source d'erreurs, même chez des candidats connaissant la définition. De plus, la description des éléments d'un sous-groupe engendré par une partie donnée n'est pas toujours correctement maîtrisée.

En probabilités, la notion de variable aléatoire demeure mal comprise. Plus étonnant, l'énoncé de la loi faible des grands nombres n'a jamais été formulé correctement, bien que de nombreux candidats sachent la démontrer. Enfin, la réécriture d'événements en fonction d'autres variables manque souvent de rigueur, ce qui affaiblit la qualité des raisonnements.

## 17.4. Conclusion

Les candidats de la filière MPI ont réalisé dans l'ensemble des prestations de qualité, tant sur le plan de la présentation orale que sur celui des connaissances et de la rigueur mathématiques. Le jury tient à les féliciter pour le sérieux de leur travail et leur niveau général très satisfaisant. Nous espérons que ces quelques remarques permettront aux futurs candidats d'aborder cette épreuve orale en ayant une vision plus précise des attendus du jury.

## 18. Mathématiques-informatique MPI

### 18.1. Introduction

L'épreuve consiste en un oral avec préparation de 30 minutes, suivi d'une présentation devant l'examineur pendant 30 minutes. Pendant la phase de préparation, les candidats disposent d'un ordinateur équipé du logiciel Python. Le sujet comporte des questions d'informatique où les candidats sont invités à créer des programmes sur l'ordinateur fourni, ainsi que des questions mathématiques. Les sujets sont assez longs, il n'est donc pas nécessaire de traiter toutes les questions pour obtenir une excellente note. Les candidats bénéficient également de fiches d'aide contenant des commandes Python. Ces dernières sont accessibles à l'adresse suivante : <https://www.concours-centrale-supelec.fr/sujets-rapports> puis en cliquant sur le lien « Fiches d'aide Python-Épreuve orale mathématiques-informatiques. »

### 18.2. Analyse globale des résultats

L'évaluation a porté sur la connaissance des notions du programme et la capacité à les mobiliser pour résoudre des problèmes ainsi que sur la clarté de l'exposé et l'aptitude à dialoguer avec l'examineur. Dans leur grande majorité, les candidats ont montré une bonne connaissance des résultats de cours. En revanche, le fait de demander quelques preuves de résultats élémentaires et notamment de première année, s'est révélé discriminant.

Les notes les plus faibles concernent les candidats qui ont montré des lacunes importantes sur des notions de cours ou très proches du cours. Même si, à l'issue de l'oral, ils ont traité un nombre non négligeable de questions, ils sont pénalisés par l'aide que l'examineur a dû leur fournir. Les notes intermédiaires concernent les candidats qui connaissent les notions de cours mais qui ont, à des degrés divers, besoin d'indications pour avancer. Les notes les plus élevées ont été attribuées à des candidats à la fois rapides et faisant preuve d'une grande autonomie. Le jury tient notamment à féliciter les quelques étudiants brillants, capables de résoudre sans aide l'intégralité de leur planche d'oral avec un exposé d'une grande clarté.

Les examinateurs ont constaté que les candidats maîtrisent globalement bien Python. De plus, contrairement aux années précédentes, une utilisation bien plus importante et pertinente des feuilles d'aide Python est observée, ce qui suggère une meilleure préparation des étudiants en MPI à cette épreuve.

Cette année encore, des candidats réalisent dans l'ensemble un excellent travail sur ordinateur et présentent une résolution remarquable des questions mathématiques.

### 18.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Le jury propose ici quelques conseils afin de permettre aux candidats d'améliorer leur prestation. Pour commencer, abordons un point concernant la logistique. L'épreuve orale dure seulement trente minutes, de l'appel du candidat à sa sortie de la salle d'interrogation. Il est vivement conseillé aux candidats de se présenter dans la salle avec leur convocation et leur pièce d'identité déjà en main. Cela permet d'éviter de perdre de précieuses minutes au début de l'épreuve.

### 18.3.1. Qualité de l'oral

L'épreuve étant un oral, il n'est pas nécessaire d'écrire intégralement au tableau. Par exemple, recopier le sujet est une perte de temps, sauf si cela aide le candidat à mieux se l'approprier. Cependant, la précision des arguments ne doit pas être négligée ; ceux-ci doivent être convaincants et synthétiques. Le tableau, outil essentiel de l'oral, ne doit servir ni de brouillon ni de copie. Il est apprécié d'y retrouver les éléments clés de logique, tels que l'introduction des variables, les symboles d'implication ou d'équivalence, les quantificateurs, et les prédicats de récurrence.

Il est fortement conseillé aux candidats de structurer leur tableau de manière systématique, par exemple en le divisant en trois colonnes. Il est regrettable de constater que certains candidats organisent encore leur présentation de manière désordonnée, commençant par écrire au centre du tableau et poursuivant ensuite là où l'espace est disponible. Une telle approche laisse présager de faibles capacités d'organisation, peu compatibles avec les exigences attendues d'un futur ingénieur.

Il est essentiel de prendre le temps de lire attentivement l'énoncé au début de l'oral. Il est tout à fait raisonnable d'y consacrer quelques minutes. Cependant, après cette lecture, il est crucial d'engager le travail sur ordinateur puis la conversation avec l'examineur. L'attitude générale joue un rôle crucial dans l'évaluation d'un oral, en particulier la qualité de l'interaction avec l'examineur. Un candidat dynamique et persévérant, qui expose ses tentatives et ne se laisse pas décourager par les premières difficultés, reçoit généralement plus d'aide qu'un candidat qui reste silencieux devant le tableau sans partager ses réflexions. À la fin d'un oral, où chaque minute compte, la différence est vraiment notable.

Il est également important de se rappeler qu'il s'agit d'une communication avec l'examineur. Il convient donc de le regarder et de lui parler suffisamment fort et distinctement pour éviter qu'il ne doive faire répéter. Dans le même ordre d'idées, il faut éviter les silences et ne pas hésiter à exprimer les idées qui viennent à l'esprit lorsque la réponse n'est pas immédiate. Ces moments de difficulté permettent d'évaluer la capacité de prise d'initiative, de réactivité et d'inventivité des candidats. Par ailleurs, il est vivement recommandé de tenir compte des recommandations et indications de l'examineur. Elles peuvent éventuellement nécessiter une reformulation, mais les ignorer complètement est rarement une bonne idée.

Enfin, il est important de ne pas omettre de donner toutes les justifications requises lors de la résolution d'une question. L'examineur a parfois été obligé de les demander. Il ne faut pas oublier que l'examineur ne se satisfait pas d'arguments implicites et attend que les points importants soient clairement énoncés.

### 18.3.2. Compétences mathématiques

Nous insistons sur le niveau général très satisfaisant des oraux. Seule une poignée de candidats a de sérieuses lacunes, mais la moindre faiblesse sur les questions de cours a été particulièrement discriminante. Par exemple, il est assez surprenant de voir plusieurs candidats soit ne pas connaître les théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrables à paramètre, soit ne pas reconnaître qu'il s'agit de les appliquer pour traiter des questions assez faciles. Surprenant encore sont ceux qui, pour prouver la linéarité d'une application entre espaces vectoriels, oublient de faire intervenir un scalaire. De tels oublis ont été fortement pénalisés. Il ne faut pas hésiter à en donner un peu plus que demandé dans l'énoncé, mais sans excès, par exemple si on est amené à manipuler une série entière, donner quelques informations sur son rayon de convergence, ou encore justifier rapidement qu'un objet est bien défini, qu'il s'agisse d'une fonction définie par une intégrale, de l'exponentielle d'une matrice, d'un supremum, etc.

Les interrogations portent aussi sur le programme de première année. On ne peut que conseiller aux futurs candidats d'en travailler les preuves élémentaires. D'une part, parce que les idées de ces preuves sont souvent une source d'inspiration pour des questions plus difficiles. D'autre part, parce qu'en les traitant rapidement le jour de l'oral, on garde un temps précieux pour les questions plus originales de l'énoncé, et ce sont celles-ci qui permettent d'obtenir les meilleures notes.

Il est tout à fait possible, et même parfois souhaitable, de donner des arguments à l'oral pour gagner du temps, mais la précision doit être de rigueur. L'exemple typique est celui des « croissances comparées », pour lequel on est en droit de demander précisément quel est l'énoncé utilisé et en quoi il peut s'appliquer.

En algèbre, des confusions sont apparues dans l'application des polynômes sur les objets algébriques, notamment avec la présence de  $\text{Ker}(P)$  dans le lemme des noyaux, l'utilisation de  $P(u(x))$  au lieu de  $P(u)(x)$ , et des polynômes annulateurs évalués sur des vecteurs. Des imprécisions ont également été observées, comme l'oubli de la non-nullité de  $X$  dans  $X^TAX > 0$  pour des matrices symétriques définies positives, le fait que  $P$  est non constant dans le théorème de d'Alembert-Gauss, et l'unicité dans la division euclidienne. La définition de « être racine simple d'un polynôme » n'a pas toujours été énoncée correctement. Le fait que les racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposées n'a pas semblé évident et a pu mettre des candidats en difficulté lors de raisonnements sur les racines d'un polynôme. La caractérisation du rang avec les matrices inversibles extraites a également posé problème. Enfin, des candidats par ailleurs excellents ont pu se retrouver en difficulté lorsqu'on leur demande de résoudre un système linéaire ou de calculer un polynôme caractéristique. Il est essentiel de maîtriser ces techniques élémentaires. En topologie et analyse, on observe des ambiguïtés entre la définition et la caractérisation du rayon de convergence d'une série entière. La définition et la preuve de la continuité de la comatrice ont posé problème. Plus généralement, certains candidats ont eu du mal à fournir des arguments précis pour justifier la continuité d'une application vectorielle. La question demandant de montrer que la norme subordonnée à la norme euclidienne standard de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est sous-multiplicative a posé problème à tous les candidats, car ils devaient manipuler des sommes à quatre indices et utilisaient la même lettre pour des indices différents. Concernant les groupes, le calcul de la signature pour une permutation donnée a pu poser problème à des candidats qui, pourtant, connaissaient la définition. La description des éléments du sous-groupe engendré par une partie d'un groupe n'est pas bien maîtrisée. En probabilités, la notion de variable aléatoire reste mal comprise. Plus surprenant, l'énoncé de la loi faible des grands nombres n'a jamais été donné correctement, bien que les candidats sachent la redémontrer. Enfin, le travail sur un événement pour le réécrire en fonction d'autres variables n'est pas toujours fait de manière rigoureuse.

## 18.4. Conclusion

Les candidats de la filière MPI ont réalisé dans l'ensemble des prestations de qualité, tant sur le plan de la présentation orale que sur celui des connaissances et de la rigueur mathématiques. Le jury tient à les féliciter pour le sérieux de leur travail et leur niveau général très satisfaisant. Nous espérons que ces quelques remarques permettront aux futurs candidats d'aborder les oraux mathématiques en ayant une vision plus précise des attendus du jury.