

## 1 Mathématiques

### 1.1 Remarques générales

L'objectif de l'épreuve orale de Mathématiques est de permettre à chaque candidat d'exprimer ses qualités. Sont principalement évaluées la maîtrise des différentes notions au programme, la capacité à élaborer seul un raisonnement, la capacité à argumenter et à critiquer, la prise d'initiative, sans oublier la qualité de la communication orale.

Le jury souligne le **bon niveau** global des admissibles au CCMP en 2024, et retire une bonne impression des quatre semaines d'oral. De nombreux candidats sont excellents et bien préparés à l'épreuve. La plupart d'entre eux se montrent motivés, capables de prendre des initiatives et d'exploiter les indications de l'examineur. Seule une petite minorité propose un oral insuffisant.

Dans une grande majorité, les candidats possèdent de solides connaissances, sont capables d'initiative face à des exercices originaux et s'emploient à échanger avec l'examineur. Le Jury est convaincu qu'ils ont toutes les aptitudes pour poursuivre avec profit leur formation scientifique.

Le jury a apprécié la courtoisie des candidats et la qualité des échanges au cours de ce qui demeure un moment de mathématiques, au delà du concours et de son stress.

Nous rappelons que l'évaluation se fait sur le programme des deux années de préparation. Les qualités attendues se développent par un travail régulier et en profondeur.

On note parfois une difficulté à lire l'énoncé donné en préparation ou à utiliser les hypothèses. Prendre le temps de lire l'énoncé et d'observer et comprendre les objets proposés fait partie de l'exercice.

Très souvent, un exercice propose des objets mathématiques dont l'existence n'est pas évidente (par exemple, une intégrale, la somme d'une série, une borne supérieure, le terme général d'une suite, etc.). Il est frappant de constater que la question de l'existence des objets ne semble même pas effleurer certains candidats, alors même qu'étudier l'existence permet souvent de mieux appréhender les objets et d'entrer plus efficacement dans l'exercice. De manière générale, s'assurer de l'existence des objets est nécessaire avant de les manipuler, par exemple avant d'écrire des inégalités.

Même si l'oral de Mathématiques reste un exercice difficile, l'objectif n'est pas de piéger les candidats à travers des calculs fastidieux, mais bien de révéler la capacité à la prise de recul vis-à-vis d'une situation donnée. Le candidat sera évalué sur sa faculté d'analyse et sur la façon dont il pourra tirer partie de ses connaissances pour proposer une réflexion adaptée.

### 1.2 Mathématiques - filières MP et MPI

#### 1.2.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale de mathématiques consiste en la résolution au tableau de deux exercices utilisant au moins deux des trois parties du programme : Algèbre, Analyse, Probabilités. Cela ne signifie pas que chacun des deux exercices portera exclusivement sur une des trois parties, les exercices de probabilités, par exemple, utilisent souvent des notions d'analyse, voire d'algèbre.

L'énoncé du premier exercice est remis au candidat à son entrée dans la salle et il dispose d'un temps de préparation sur table de quinze minutes. L'oral commence en général par la vérification de l'identité du candidat, il est donc préférable que la pièce d'identité ne soit pas enfouie au fond d'un sac, voire introuvable, cela fait perdre du temps au candidat et gêne l'examineur qui doit suivre en même temps le candidat précédent à qui il reste quinze minutes d'épreuve au tableau. Les candidats sont presque tous au courant de l'existence de cette préparation sur table, il y en a encore quelques uns qui sont surpris et nous avons même vu le cas extrême de candidats qui n'avaient rien pour écrire. Précisons donc que le concours ne fournit que le papier et les bouchons d'oreilles, dont l'utilisation est fortement recommandée.

A l'issue de sa préparation, le candidat présente le résultat de ses recherches et continue la résolution de l'exercice, en général pendant vingt à trente minutes. Le temps au tableau consacré au premier exercice ne pourra en aucun cas dépasser trente-cinq minutes. L'examineur propose ensuite un deuxième exercice à résoudre sans préparation. Dans le cas relativement rare où le deuxième exercice est résolu très rapidement, il sera proposé un troisième exercice au candidat.

Les principaux éléments d'évaluation de la prestation sont :

- La maîtrise du programme de mathématiques de la classe de MP/MPI,
- La capacité à analyser un énoncé et proposer une ou plusieurs méthodes de résolution,
- L'évaluation des chances d'aboutir d'une méthode de résolution et éventuellement en changer,
- L'écoute des commentaires et indications de l'examineur et la capacité à les utiliser de manière efficace.

### 1.2.2 Remarques sur la session 2025 et conseils aux futurs candidats

On voit, par exemple, l'entraînement à l'utilisation d'un tableau fait pendant les colles : la plupart des candidats présentent très bien leurs calculs, en écrivant très lisiblement. Il reste des cas de mauvaise gestion du tableau, à tel point que suivre la résolution de l'exercice tourne au jeu de piste. Il faut aussi éviter d'écrire trop gros car cela impose d'effacer trop vite. A l'opposé certains écrivent si petit que cela devient illisible...C'est évidemment très pénalisant, d'autant plus que cela perturbe les échanges. Une dernière recommandation dans l'utilisation du tableau : veiller à effacer correctement, si on laisse des bouts de texte on risque de les prendre pour des « moins».

Il est fondamental que les candidats soient conscients qu'un oral n'est pas un écrit debout, donc que les interactions avec l'examineur en font partie et sont un élément important pour l'évaluation. L'examineur sera donc amené à poser des questions, à faire des remarques ou à proposer des indications.

Il peut arriver que l'on demande des précisions sur la mise en œuvre d'un théorème. Pour certains, appliquer un théorème en mathématiques se réduit à citer le nom d'un mathématicien (ou d'un théorème) alors que cela consiste à vérifier des hypothèses et à en déduire des conclusions. Pour autant, une demande de l'examineur dans ce sens n'aura pas forcément des conséquences négatives, surtout si les compléments demandés sont donnés sans hésitations ni erreurs, et elle ne doit en aucun cas être déstabilisante.

L'examinateur peut aussi demander des précisions sur une démonstration par récurrence, surtout qu'elles sont souvent survolées, voire éludées.

Certains candidats vont aborder l'exercice par une méthode que l'examinateur n'a pas forcément explorée. Dans ce cas, il laissera le candidat poursuivre le temps de se faire une opinion (c'est en général assez rapide) sur les chances de succès de la méthode. Si elle est vouée à l'échec et que le candidat ne s'en rend pas compte par lui-même, il tentera de le mettre en garde par des remarques indiquant les raisons de son pessimisme. Il arrive que le candidat ne tienne pas compte des mises en garde et poursuive imperturbablement dans la voie qu'il a choisie... le résultat est en général une mauvaise note. Si un candidat reste bloqué sur un exercice, l'examinateur proposera de donner une indication, ce que le candidat peut refuser s'il pense qu'il peut trouver seul, cela n'est en aucun cas pénalisant s'il sait s'arrêter à temps. Par contre, le refus systématique de considérer une indication peut conduire à un exercice à peine abordé, avec par exemple, sur le premier, la résolution au bout de trente-cinq minutes de la moitié de la première question, alors que l'exercice en comportait quatre.

Les attitudes consistant à dire « je ne vois pas » ou à demander des indications sont à éviter et ont des conséquences très négatives sur la note. Il est possible que l'examinateur reste silencieux parce que les recherches du candidat vont dans la bonne direction. Certains candidats commencent par une énumération des méthodes possibles pour aborder l'exercice, attendant visiblement que l'examinateur guide leur choix, ce qu'il ne fera pas, du moins dans un premier temps, puisque l'évaluation des avantages et inconvénients de chaque méthode est à la charge du candidat.

### Analyse des difficultés

Les questions qui relèvent plutôt du programme de première année posent des problèmes. Rappelons donc que le programme du concours est constitué de ceux des deux années de classes préparatoires.

#### *Analyse*

De manière générale, les calculs posent de gros problèmes. Les développements limités classiques sont en général bien connus, mais il manque souvent le  $o$ , dans les opérations les ordres ne sont pas respectés et il y a presque toujours des erreurs de calcul.

Dans le même genre de difficulté technique, le produit de Cauchy de deux séries entières est assez souvent mal fait.

On observe assez souvent des erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégral.

La trigonométrie de base est bien maîtrisée, mais ici aussi le moindre calcul peut prendre du temps et générer pas mal d'erreurs.

Les « bêtes noires » des élèves de CPGE restent la topologie et le calcul différentiel.

En topologie les questions portant sur l'intérieur ou l'adhérence d'une partie sont presque toujours abordées en utilisant la définition d'un point adhérent ou d'un point intérieur, alors qu'il est souvent plus simple d'utiliser des propriétés de ces ensembles. Il manque souvent des hypothèses : le théorème des bornes atteintes suppose que l'on soit sur un compact, le lien entre les points critiques et les extrémums est vrai sur un ouvert.

En calcul différentiel, les candidats ont souvent des difficultés pour dériver en utilisant la règle de la chaîne. Pour vérifier la différentiabilité d'une fonction, ils ont systématiquement recours aux dérivées partielles et à l'étude de leur continuité, alors qu'il y a en général des méthodes beaucoup plus rapides. Les applications à la géométrie, comme la détermination du plan tangent à une surface dans  $\mathbf{R}^3$  sont

particulièrement redoutées. L'usage du calcul différentiel pour résoudre des problèmes de topologie, notamment des problèmes simples d'optimisation semble complètement absent de leur formation.

Les connaissances sur les équations différentielles sont en général correctes, mais certains candidats ne connaissent pas la méthode de variation des constantes pour une équation du second ordre. La résolution d'un système différentiel avec second membre est en général mal traitée. Dans les résolutions, il manque souvent les quantificateurs.

Terminons avec le calcul intégral. Le calcul d'une intégrale peut commencer par une réflexion sur la méthode la plus adaptée, le recours automatique à une intégration par parties n'est pas toujours une bonne stratégie. On ne peut pas toujours prévoir le résultat d'un changement de variable, il est donc fondamental de savoir s'arrêter et changer de méthode s'il ne produit l'effet escompté. Pour justifier de l'intégrabilité d'une fonction, il faut préciser qu'elle est continue par morceaux sur l'intervalle, et il est inutile de faire une étude en une borne s'il suffit de justifier que la fonction est continue. L'intégration des relations de comparaison n'est pas toujours maîtrisée.

### *Algèbre*

Il est surprenant que la factorisation du polynôme  $X^{2n} - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$  pose des problèmes à un certain nombre de candidats.

Les capacités en calcul matriciel sont extrêmement variables, certains candidats montrent une aisance remarquable alors que d'autres peinent sur le produit de deux matrices  $3 \times 3$ . Ces difficultés sont d'autant plus pénalisantes que le recours au calcul matriciel est assez systématique, même dans des cas où le nombre de paramètres laisse prévoir des calculs inextricables qui n'aboutiront pas.

Les questions de contre-exemple sont en général redoutables, par exemple les candidats ont du mal à exhiber une matrice  $2 \times 2$  non trigonalisable.

Le cours sur la réduction des endomorphismes, en particulier sur celle des endomorphismes symétriques est en général bien connu, mais son utilisation est quelquefois un peu longue à venir, par exemple ne pas avoir le réflexe d'appliquer le théorème spectral à une matrice réelle de la forme  $MM^T$  est assez surprenant.

Pour certains candidats, la seule caractérisation des matrices orthogonales est  $MM^T = I_n$ , alors que pour de nombreux exercices l'utilisation des propriétés sur les lignes et colonnes est nettement plus performante. Pour certains, les matrices de rotations ont pour seules valeurs propres 1 et  $-1$ .

La densité des matrices inversibles est très souvent invoquée, même dans des cas où cela n'apporte strictement rien.

### *Probabilités*

Le cours est en général bien connu, toutefois il y a des candidats qui ne connaissent pas (ou mal) l'espérance et la variance des lois de probabilités au programme. Ils doivent donc les retrouver, ce qui est au mieux une perte de temps et, au pire, une forte perte de points quand il s'avère qu'ils ont des difficultés pour y parvenir. Les hypothèses du théorème de transfert sont assez souvent mal énoncées, de même que celles d'équiprobabilité ou d'indépendance.

Les exercices de probabilité sont quelquefois contextualisés, il faut dans ce cas s'assurer de bien comprendre l'énoncé, par exemple en précisant les événements considérés et leurs probabilités déduites du contexte. Souvent  $\Omega$  et  $X(\Omega)$  ne sont pas précisés et quelquefois confondus.

Pour les problèmes de dénombrement, le recours aux expressions utilisant des factorielles est souvent privilégié, alors que cela n'est pas en général la meilleure méthode.

## Rapport des oraux - CCMP

### 1.2.3 Conclusion

Il est important d'aborder positivement une épreuve orale, soyez certain que l'examineur ne cherche pas à vous piéger, son but est d'évaluer vos compétences de la manière la plus juste possible et il conduira la planche dans ce but.

Les remarques et indications sont modulées en fonction de la difficulté de l'exercice ou de son originalité. Un exercice peut être surprenant sans être forcément difficile, un exercice peut être long et dans ce cas il n'est pas nécessaire de le terminer pour avoir une bonne note.

