# Compléments d'algèbre linéaire

## Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne réprésentation géométrique des espaces vectoriels ?
4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?
7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?
8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?
9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?
10. Que désigne la notation $\mathrm{Vect}(A)$ ?
11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?
12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?
13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?
14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann.

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?
    D'autres termes dans le même contexte ?
18. Qu'est-ce que le **noyau** de $u$, à quoi sert-il ?
19. Qu'est-ce que l'**image** de $u$, comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de $u$ ?
21. Que signifie $u \circ v = 0$ ?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?
23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

# 1 Produit et somme d'espaces vectoriels

## 1.1 Produit d'espaces vectoriels

**Définition.** Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i = \big\{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\},\ x_i \in E_i\big\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$
$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod\limits_{i=1}^{p} E_i$.

**Proposition.** Muni de ces deux opérations, $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Proposition.** Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \dots, n_p$, alors $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i$.

**Exemple.** $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension $p$.

## 1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

**Lemme.** La somme de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Proposition.** Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$$

## 1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

**Définition.** Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les $F_i$ **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les $F_i$ sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ pour désigner $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

**Remarque.** *Ça signifie que la seule façon de construire $0_E$ comme somme de vecteurs des $F_i$ est de l'écrire comme somme de $0_{F_i}$.*

**Remarque.** *Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.*

**Théorème.**

En conservant les notations précédentes, les $F_i$ sont en somme directe si et seulement si tout vecteur $x$ de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ se décompose **de façon unique** selon les $F_i$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists!(x_1,\ldots,x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

**Remarque.** *Lorsque $x \in \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de $x$ selon $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$. Si les $F_i$ sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de* ***la décomposition de** $x$* *selon $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.*

**Remarque.** *On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ F_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} F_j\Big) = \{0_E\}$$

*Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.*

## 1.4 Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe

**Proposition.** Si $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$, on peut définir, pour tout $i$, le projecteur $p_i$ sur $F_i$ de direction $\bigoplus\limits_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{p} F_k$. Alors :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{p} p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

## 1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

**Proposition.** Soit $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1,\ldots,F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces $p$ bases.

Si les $F_i$ sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

**Proposition.** Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

**Théorème.**

Soit $F_1,\ldots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de $E$. Alors on a :

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les $F_i$ sont en somme directe.

## 1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

**Définition.** Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ sont dits **supplémentaires** dans $E$ si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

**Exemple.** Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exemple.** On note $\mathcal{T}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^{+}(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Rappel.** Caractérisation par décomposition unique.
En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.
En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

**Définition.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$. On appelle **base de $E$ adaptée à $F$** toute base de $E$ obtenue en complétant une base de $F$ en une base de $E$.

**Remarque.** *Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.*

**Rappel.** Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

# 2 Applications linéaires, endomorphismes

## 2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires

**Proposition.** Soit $E, F, G$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ (u,v) & \mapsto & u \circ v \end{array}$ est bilinéaire.

**En passant.**

$$u \circ v = 0 \iff \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

**Proposition.** Soit $E, F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Lorsque $E$ et $F$ sont deux espaces de dimensions finies respectives $n$ et $p$, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie $n \times p$.

**Remarque.** *En particulier, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur $E$ est un espace vectoriel. On le note parfois $E^*$ et il s'appelle l'**espace dual** de $E$. Son étude est hors programme.*
*Lorsque $E$ est de dimension finie, $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est de même dimension finie.*

**Proposition.** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre, non commutative et non intègre.

**Proposition.** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif.

## 2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base

**Théorème.**

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base d'un espace vectoriel $E$, $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $F$, indexée par le même ensemble $I$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

**Remarque.** *Ce théorème est à la base de la notion de matrice représentant une application linéaire.*

**Corollaire.** Avec les notations précédentes :

- $u$ est surjective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ engendre $F$.
- $u$ est injective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ est libre.

**Proposition.** Une application linéaire $E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si elle transorme une (resp. toute) base de $E$ en une base de $F$.

**Corollaire.** Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

### 2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

**Théorème.**

> Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout $i$, on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
> Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout $i$.

**Corollaire.** Deux applications linéaires qui coïncident sur tous les $F_i$ sont égales. On peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque $F_i$.

**Remarque.** *La donnée, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, de $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ permet donc de définir sans ambiguité une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie sur $E$ tout entier.*

### 2.4 Rang

**Définition.** Soit $f$ une application linéaire. Lorsque son image est dimension finie, on dit que $f$ est de rang fini, et on définit le **rang de** $f$ par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

**Proposition.** Le rang est inchangé lorsque l'on compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

**Théorème du rang, forme géométrique.**

> Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et $S$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $E$. Alors $u$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\, u$, i.e. :
> $$\begin{array}{rccl} \widetilde{u} : & S & \to & \mathrm{Im}(u) \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$
> est un isomorphisme.

**Théorème du rang.**

> En particulier, si $E$ est de dimension finie, alors $u$ est de rang fini et :
> $$\dim E_{\text{source}} = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) \quad \text{soit encore} \quad \mathrm{rg}(u) = \dim E_{\text{source}} - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$$

**Corollaire.** Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, avec $E$ et $F$ de même dimension finie. Alors $u$ est bijective si et seulement si $u$ est injective, si et seulement si $u$ est surjective.
Le résultat s'applique en particulier pour les endomorphismes en dimension finie.

## 3 Annexes

### 3.1 Un mot sur les équations linéaires

On s'intéresse aux **équations linéaires**, de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$ et d'inconnue $x \in E$.

**Proposition.** L'ensemble des solutions est :

- soit vide ;
- soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$, où $x_0$ est une solution particulière de l'équation.

*Preuve.* On suppose qu'il existe $x_0$ solution particulière. On a alors :

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff u(x)=b \\ &\iff u(x)=u(x_0) \text{ car } u(x_0)=b \\ &\iff u(x-x_0)=0 \text{ par linéarité de } u \\ &\iff x-x_0 \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S=\{x_0+t, t\in \operatorname{Ker} u\}$$

que l'on note $x_0+\operatorname{Ker} u$. □

**Remarque.** *L'ensemble $x_0+\operatorname{Ker} u$ n'est pas un espace vectoriel, mais le translaté d'un espace vectoriel, que l'on appelle **espace affine**.*

**Exemple.** Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_n$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=4u_n-3$$

**Exemple.** Déterminer toutes les couples $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$$

**Exemple.** Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ telles que :

$$2ty'+y=\frac{1}{t}$$

**Exemple.** Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$y''-2y'+y=\mathrm{e}^t$$

# Exercices et résultats classiques à connaître

## Endomorphisme nilpotent et base

**21.1**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $f$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n$, i.e. $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x\right) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de $f$ dans cette base ?

## Noyaux itérés

**21.2**

Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_p = \mathrm{Im}(f^p) \text{ et } K_p = \mathrm{Ker}(f^p)$$

où $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

(a) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (resp. $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$) est décroissante (resp. croissante) pour l'inclusion.

On suppose maintenant que $E$ est de dimension finie.

(b) Justifier l'existence de $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_{r+1} = I_r$.

(c) Montrer que les deux suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang $r$.

(d) Justifier que :

$$I_r \oplus K_r = E$$

## Une astuce à avoir vue

**21.3**

Soit $f$ un endomophisme de $E$. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que $f$ est un homothétie.

# Exercices du CCINP

**21.4** CCINP **55.1**

Soit $a$ un nombre complexe.
On note $E$ l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de $E$.

**21.5** CCINP **59.12**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que $f$ est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de $f$,
2. Soit $Q \in E$. Trouver $P$ tel que $f(P) = Q$ .
   **Indication** : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$ ?

**21.6** CCINP **60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. $f$ est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ ?

**21.7** CCINP **62.123**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que $f$ est bijectif et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $f$.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ :
3. Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

**21.8** CCINP **64**

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

**21.9** CCINP **71**

Soit $P$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $D$ la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $p$ la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $p$ est diagonale.

**21.10** CCINP **93.1**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur $E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u = E$.

## Exercices

**21.11**

On considère :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(a+b, a, a+3b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $F \cap G$.

**21.12**

On note $F$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$$

Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et déterminer sa dimension.

**21.13**

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **à support compact** s'il existe $A \geqslant 0$ tel que $f$ soit nulle en dehors de $[-A, A]$.
Montrer que l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

**21.14**

Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

**21.15**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, $H_1, \dots, H_k$ des hyperplans de $E$. Montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) \geqslant n - k$$

**21.16**

Soit $H$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation :

$$x + 2y - z + 3t = 0$$

(a) Déterminer une base de $H$.

(b) Exhiber un supplémentaire de $H$.

On se place maintenant dans le cas plus général où $H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, défini par l'équation :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

(c) Montrer que $\mathrm{Vect}\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ est un supplémentaire de $H$.

**21.17**

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\left(X^k (a - X)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

**21.18**

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

**21.19**

Dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit pour tout réel $\lambda$ :

$$e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

**21.20**

Soit $u_1, \dots, u_n, u_{n+1} \in E$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

(b) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice.

**21.21**

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $P$ d'équation $x-y+z=0$ et la droite $D=\mathrm{Vect}(u)$ où $u=(1,3,1)$.

(a) On note $p$ la projections sur $P$ parallèlement à $D$. Exprimer $p(x,y,z)$.

(b) On note $s$ la symétrie par rapport à $P$ parallèlement à $D$. Exprimer $s(x,y,z)$.

**21.22**

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs d'un espace vectoriel $E$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ si et seulement si $p\circ q = p$ et $q \circ p = q$.

(b) Énoncer une condition semblable pour traduire $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

**21.23**

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs d'un espace vectoriel $E$.

(a) Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$.

(b) Préciser, dans ce cas, $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$.

**21.24**

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, on définit pour $k=0,1,2$ :

$$F_k = \{f \,:\, \mathcal{C}\to\mathcal{C},\ \forall z\in C,\ f(\mathrm{j}z) = \mathrm{j}^k f(z)\}$$

Montrer que la somme $F_0+F_1+F_2$ est directe.

**21.25**

Soit $E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f\in E,\ f \text{ constante}\} \\ F_2 &= \{f\in E,\ \forall t\in[-1,0],\ f(t)=0\} \\ F_3 &= \{f\in E,\ \forall t\in[0,1],\ f(t)=0\} \end{aligned}$$

Montrer que :

$$E = F_1\oplus F_2\oplus F_3$$

**21.26**

Dans l'espace $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère les sous-espaces :

$$F=\{f\in E,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\} \text{ et } G=\{g\in E,\ g \text{ constante}\}$$

Montrer que $F\oplus G = E$.

**21.27**

Dans l'espace $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère :

$$F=\{f\in E,\ f(0)=f(1)=0\} \text{ et } G=\{g\in E,\ g \text{ affine}\}$$

Montrer que $F\oplus G = E$.

**21.28**

Soit $E=\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et $P$ (resp. $I$) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que $P\oplus I = E$.

## Petits problèmes d'entrainement

**21.29** ✍

On note $E=\mathbb{K}[X]$. Pour $P\in E$, on note :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1-\frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

(a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

(b) Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de $P$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

(d) On pose $\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ Q_n = \varphi(X^n)\end{cases}$.
Montrer que pour tout $p$, la famille $(Q_0,\dots,Q_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

(e) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de $E$.
Vérifier que $\operatorname{Im}\varphi$ est le noyau de la forme linéaire $\theta$ définie par :

$$\theta(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

**21.30** ✍

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N_k = \operatorname{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \operatorname{Im}(f^k)$$

(a) Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, et que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Justifier que $\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $\mathcal{C} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$.

(c) On suppose dans cette question que $f \in \mathrm{GL}(E)$. Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$.

On suppose dorénavant que $E$ est de dimension finie.

(d) Expliquer pourquoi les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires. On note $r$ et $s$ respectivement les plus petits entiers à partir desquels $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont constantes.

(e) Montrer que $r = s$.

(f) Montrer que $\mathcal{N} \oplus \mathcal{C} = E$.

(g) Démontrer que les endomorphismes induits $f_{\mathcal{N}}$ et $f_{\mathcal{C}}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.

**21.31**

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ espace vectoriel. On suppose $u$ nilpotent d'indice $p$. On définit :

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k$$

(a) Montrer que, pour tout $x$ tel que $u^k(x) \neq 0$, $\big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$ est une famille libre.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$.

**21.32**

On souhaite démontrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ :

$$\int_0^\pi P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^1 P(u)\,\mathrm{d}u$$

(a) Quelle idée faut-il se retenir d'avoir, et pourquoi ?

(b) Que dire des applications $\varphi \;:\; P \mapsto \displaystyle\int_0^\pi P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ et $\psi \;:\; P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 P(u)\,\mathrm{d}u$ ?

(c) Démontrer l'égalité demandée, par un calcul simple.

**21.33**

On considère $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

**21.34**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

($i$) Il existe une droite vectorielle $D$ telle que $H \oplus D = E$.

($ii$) Il existe une forme linéaire non nulle $\varphi$ telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

On dit alors que $H$ est un hyperplan de $E$.
On peut remarquer que, lorsque $E$ est de dimension finie $n$, c'est encore équivalent à $\dim(E) = n - 1$.

**21.35**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant :

$$\operatorname{Ker} u = F \text{ et } \operatorname{Im} u = G$$

**21.36**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(a) $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$

(b) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$