

Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens	2
Cours	3
1 Produit et somme d'espaces vectoriels	3
1.1 Produit d'espaces vectoriels	3
1.2 Somme de sous-espaces vectoriels	3
1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe	3
1.4 Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe	4
1.5 Sommes directes et bases	4
1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires	5
2 Applications linéaires, endomorphismes	5
2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires	5
2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base	5
2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe	6
2.4 Rang	6
3 Annexes	7
3.1 Un mot sur les équations linéaires	7
Exercices	8
Exercices et résultats classiques à connaître	8
Endomorphisme nilpotent et base	8
Noyaux itérés	8
Une astuce à avoir vue	8
Exercices du CCINP	9
Exercices	10
Petits problèmes d'entraînement	11

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne représentation géométrique des espaces vectoriels ?
4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?
7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?
8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?
9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?
10. Que désigne la notation $\text{Vect}(A)$?
11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?
12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?
13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?
14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann.

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?
D'autres termes dans le même contexte ?
18. Qu'est-ce que le **noyau** de u , à quoi sert-il ?
19. Qu'est-ce que l'**image** de u , comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?
21. Que signifie $u \circ v = 0$?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?
23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \\ (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod_{i=1}^p E_i$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \dots, n_p$, alors $\prod_{i=1}^p E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum_{i=1}^p n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p .

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^p F_i \right)$$

1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition. Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les F_i **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les F_i sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ pour désigner $\sum_{i=1}^p F_i$.

Remarque. Ça signifie que la seule façon de construire 0_E comme somme de vecteurs des F_i est de l'écrire comme somme de 0_{F_i} .

Remarque. Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.

Théorème.

En conservant les notations précédentes, les F_i sont en somme directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum_{i=1}^p F_i$ se décompose **de façon unique** selon les F_i , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^p x_i$$

Remarque. Lorsque $x \in \sum_{i=1}^p F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \dots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de x selon $\sum_{i=1}^p F_i$. Si les F_i sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de **la décomposition de x selon $\bigoplus_{i=1}^p F_i$** .

Remarque. On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p F_j \right) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

1.4 Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe

Proposition. Si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, on peut définir, pour tout i , le projecteur p_i sur F_i de direction $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k$. Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

Proposition. Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces p bases.

Si les F_i sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

Théorème.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de E . Alors on a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.

1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappel. Caractérisation par décomposition unique.

En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.

En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p . On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E .

Remarque. Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.

Rappel. Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

2 Applications linéaires, endomorphismes

2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires

Proposition. Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$ est bilinéaire.
 $(u, v) \mapsto u \circ v$

En passant.

$$u \circ v = 0 \iff \text{Im } v \subset \text{Ker } u$$

Proposition. Soit E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Lorsque E et F sont deux espaces de dimensions finies respectives n et p , alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie $n \times p$.

Remarque. En particulier, l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un espace vectoriel. On le note parfois E^* et il s'appelle l'**espace dual** de E . Son étude est hors programme.

Lorsque E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de même dimension finie.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre, non commutative et non intègre.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif.

2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base

Théorème.

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base d'un espace vectoriel E , $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F , indexée par le même ensemble I , alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Remarque. Ce théorème est à la base de la notion de matrice représentant une application linéaire.

Corollaire. Avec les notations précédentes :

- u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ engendre F .
- u est injective si et seulement si $(f_i)_{i \in I}$ est libre.

Proposition. Une application linéaire $E \rightarrow F$ est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (resp. toute) base de E en une base de F .

Corollaire. Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

Théorème.

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Pour tout i , on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Corollaire. Deux applications linéaires qui coïncident sur tous les F_i sont égales. On peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque F_i .

Remarque. La donnée, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, de $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ permet donc de définir sans ambiguïté une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie sur E tout entier.

2.4 Rang

Définition. Soit f une application linéaire. Lorsque son image est dimension finie, on dit que f est de rang fini, et on définit le **rang de f** par :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$$

Proposition. Le rang est inchangé lorsque l'on compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Théorème du rang, forme géométrique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E . Alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$, i.e. :

$$\begin{aligned} \tilde{u} : S &\rightarrow \text{Im}(u) \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Théorème du rang.

En particulier, si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et :

$$\dim E_{\text{source}} = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u) \quad \text{soit encore} \quad \text{rg}(u) = \dim E_{\text{source}} - \dim(\text{Ker } u)$$

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, avec E et F de même dimension finie. Alors u est bijective si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.

Le résultat s'applique en particulier pour les endomorphismes en dimension finie.

3 Annexes

3.1 Un mot sur les équations linéaires

On s'intéresse aux **équations linéaires**, de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$ et d'inconnue $x \in E$.

Proposition. L'ensemble des solutions est :

- soit vide ;
- soit de la forme $x_0 + \text{Ker } u$, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Preuve. On suppose qu'il existe x_0 solution particulière. On a alors :

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff u(x) = b \\ &\iff u(x) = u(x_0) \text{ car } u(x_0) = b \\ &\iff u(x - x_0) = 0 \text{ par linéarité de } u \\ &\iff x - x_0 \in \text{Ker } u \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{x_0 + t, t \in \text{Ker } u\}$$

que l'on note $x_0 + \text{Ker } u$. $\square$

Remarque. L'ensemble $x_0 + \text{Ker } u$ n'est pas un espace vectoriel, mais le translaté d'un espace vectoriel, que l'on appelle **espace affine**.

Exemple. Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_n$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 3$$

Exemple. Déterminer toutes les couples $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Exemple. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ telles que :

$$2ty' + y = \frac{1}{t}$$

Exemple. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Endomorphisme nilpotent et base

210.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme nilpotent d'indice n , i.e. $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Noyaux itérés

210.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

- (a) Montrer que la suite $(\text{Ker } f^p)_p$ est croissante pour l'inclusion.
- (b) Justifier l'existence d'un plus petit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker } f^r = \text{Ker } f^{r+1}$.
- (c) Montrer que la suite $(\text{Ker } f^p)_p$ est constante à partir du rang r .
- (d) Démontrer que :

$$E = \text{Ker } f^r \oplus \text{Im } f^r$$

- (e) Que peut-on dire de la suite $(\text{Im } f^p)_p$?

Une astuce à avoir vue

210.3

Soit f un endomorphisme de E . On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercices du CCINP

210.4
 55.1

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .

210.5
 59.12

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

(a) sans utiliser de matrice de f ,

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

210.6
 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

210.7
 62.123

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

210.8
 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- (b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

210.9
 71

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

210.10
 93.1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

On notera Id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.

Exercices

210.11

On considère :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(a + b, a, a + 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer $F \cap G$.

210.12

On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et déterminer sa dimension.

210.13

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **à support compact** s'il existe $A \geq 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Montrer que l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

210.14

Montrer que :

$$\text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

210.15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $H_1, \dots, H_k$ des hyperplans de E . Montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) \geq n - k$$

210.16

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation :

$$x + 2y - z + 3t = 0$$

- (a) Déterminer une base de H .
- (b) Exhiber un supplémentaire de H .

On se place maintenant dans le cas plus général où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, défini par l'équation :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

- (c) Montrer que $\text{Vect}((a_1, \dots, a_n))$ est un supplémentaire de H .

210.17

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(X^k(a - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

210.18

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

210.19

Dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit pour tout réel λ :

$$e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$$

Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

210.20

Soit $u_1, \dots, u_n, u_{n+1} \in E$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- (a) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre.
- (b) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice.

210.21

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x - y + z = 0$ et la droite $D = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 3, 1)$.

- (a) On note p la projections sur P parallèlement à D . Exprimer $p(x, y, z)$.
- (b) On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D . Exprimer $s(x, y, z)$.

210.22

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

- (a) Montrer que $\text{Ker } p = \text{Ker } q$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
- (b) Énoncer une condition semblable pour traduire $\text{Im } p = \text{Im } q$.

210.23

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

- (a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
- (b) Préciser, dans ce cas, $\text{Im}(p + q)$ et $\text{Ker}(p + q)$.

210.24

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, on définit pour $k = 0, 1, 2$:

$$F_k = \{f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \forall z \in \mathcal{C}, f(jz) = j^k f(z)\}$$

Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2$ est directe.

210.25

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in E, f \text{ constante}\} \\ F_2 &= \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \\ F_3 &= \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\} \end{aligned}$$

Montrer que :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

210.26

Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on considère les sous-espaces :

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0\} \text{ et } G = \{g \in E, g \text{ constante}\}$$

Montrer que $F \oplus G = E$.

210.27

Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on considère :

$$F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E, g \text{ affine}\}$$

Montrer que $F \oplus G = E$.

210.28

Soit $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et P (resp. I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que $P \oplus I = E$.

Petits problèmes d'entraînement**210.29**

On note $E = \mathbb{K}[X]$. Pour $P \in E$, on note :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- (b) Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
- (c) Déterminer $\text{Ker } \varphi$.

- (d) On pose $\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \varphi(X^n) \end{cases}$.

Montrer que pour tout p , la famille $(Q_0, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

- (e) Montrer que $\text{Im } \varphi$ est un hyperplan de E .
Vérifier que $\text{Im } \varphi$ est le noyau de la forme linéaire θ définie par :

$$\theta(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

210.30

Soit E un K -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N_k = \text{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \text{Im}(f^k)$$

- (a) Montrer que $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, et que $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (b) Justifier que $\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ et $\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f .
- (c) On suppose dans cette question que $f \in \text{GL}(E)$. Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

- (d) Expliquer pourquoi les suites $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires. On note r et s respectivement les plus petits entiers à partir desquels $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont constantes.
- (e) Montrer que $r = s$.
- (f) Montrer que $\mathcal{N} \oplus \mathcal{C} = E$.
- (g) Démontrer que les endomorphismes induits $f_{\mathcal{N}}$ et $f_{\mathcal{C}}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.

210.31

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel. On suppose u nilpotent d'indice p . On définit :

$$e^u = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k$$

- (a) Montrer que, pour tout x tel que $u^k(x) \neq 0$, $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est une famille libre.

- (b) Déterminer $\text{Ker}(e^u - \text{Id}_E)$.

210.32

On souhaite démontrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$\int_0^\pi P(e^{it}) i e^{it} dt = - \int_{-1}^1 P(u) du$$

- (a) Quelle idée faut-il se retenir d'avoir, et pourquoi ?
- (b) Que dire des applications $\varphi : P \mapsto \int_0^\pi P(e^{it}) i e^{it} dt$ et $\psi : P \mapsto \int_{-1}^1 P(u) du$?
- (c) Démontrer l'égalité demandée, par un calcul simple.

210.33

On considère $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

210.34

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et H un sous-espace vectoriel de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$.
- (ii) Il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

On dit alors que H est un hyperplan de E .

On peut remarquer que, lorsque E est de dimension finie n , c'est encore équivalent à $\dim(E) = n - 1$.

210.35

Soit E un espace vectoriel de dimension n , F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant :

$$\text{Ker } u = F \text{ et } \text{Im } u = G$$

210.36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

- (a) $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$
- (b) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$

210.37

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $e = \operatorname{Id}_E$ et G un sous-groupe fini de $\operatorname{GL}(E)$ et $n = \operatorname{Card}(G)$. On note : $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

- (a) Montrer que : $\forall h \in G, p \circ h = p$.
- (b) En déduire que p est un projecteur de E .
- (c) Établir : $\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e) = \operatorname{Im}(p)$.
- (d) En déduire que :

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$$