

## Compléments d'algèbre linéaire

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Je me souviens                                                                    | 2  |
| Cours                                                                             | 3  |
| 1 Produit et somme d'espaces vectoriels . . . . .                                 | 3  |
| 1.1 Produit d'espaces vectoriels . . . . .                                        | 3  |
| 1.2 Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .                                    | 3  |
| 1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe . . . . .                            | 3  |
| 1.4 Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe . . . . .    | 4  |
| 1.5 Sommes directes et bases . . . . .                                            | 4  |
| 1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires . . . . .        | 5  |
| 2 Applications linéaires, endomorphismes . . . . .                                | 5  |
| 2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires . . . . .                | 5  |
| 2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base . . . . .                      | 5  |
| 2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe . . . . . | 6  |
| 2.4 Rang . . . . .                                                                | 6  |
| 3 Annexes . . . . .                                                               | 7  |
| 3.1 Un mot sur les équations linéaires . . . . .                                  | 7  |
| Exercices                                                                         | 8  |
| Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .                           | 8  |
| Endomorphisme nilpotent et base . . . . .                                         | 8  |
| Noyaux itérés . . . . .                                                           | 8  |
| Une astuce à avoir vue . . . . .                                                  | 8  |
| Exercices du CCINP . . . . .                                                      | 9  |
| Exercices . . . . .                                                               | 10 |
| Petits problèmes d'entraînement . . . . .                                         | 11 |

## Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne représentation géométrique des espaces vectoriels ?
4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?
7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?
8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?
9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?
10. Que désigne la notation  $\text{Vect}(A)$  ?
11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?
12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?
13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?
14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann.
  
17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?  
D'autres termes dans le même contexte ?
18. Qu'est-ce que le **noyau** de  $u$ , à quoi sert-il ?
19. Qu'est-ce que l'**image** de  $u$ , comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de  $u$  ?
21. Que signifie  $u \circ v = 0$  ?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?
23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

## 1 Produit et somme d'espaces vectoriels

### 1.1 Produit d'espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois  $+$  et  $\cdot$  définies par :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \\ (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \end{aligned}$$

où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$ .

**Proposition.** Muni de ces deux opérations,  $\prod_{i=1}^p E_i$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition.** Lorsque  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimensions finies, notées respectivement  $n_1, \dots, n_p$ , alors  $\prod_{i=1}^p E_i$  est de dimension finie, et sa dimension est  $\sum_{i=1}^p n_i$ .

**Exemple.**  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}^p$  est un espace vectoriel produit sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $p$ .

### 1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}$$

**Lemme.** La somme de sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Proposition.** Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \text{Vect} \left( \bigcup_{i=1}^p F_i \right)$$

### 1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

**Définition.** Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les  $F_i$  **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les  $F_i$  sont en somme directe, on modifie la notation, et on note  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$  pour désigner  $\sum_{i=1}^p F_i$ .

**Remarque.** Ça signifie que la seule façon de construire  $0_E$  comme somme de vecteurs des  $F_i$  est de l'écrire comme somme de  $0_{F_i}$ .

**Remarque.** Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à  $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ . Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.

**Théorème.**

En conservant les notations précédentes, les  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si tout vecteur  $x$  de  $\sum_{i=1}^p F_i$  se décompose **de façon unique** selon les  $F_i$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^p x_i$$

**Remarque.** Lorsque  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$ , il peut s'écrire  $x = x_1 + \dots + x_p$ . On dit que l'on a écrit une décomposition de  $x$  selon  $\sum_{i=1}^p F_i$ . Si les  $F_i$  sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de **la décomposition de  $x$  selon  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$** .

**Remarque.** On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p F_j \right) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

## 1.4 Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe

**Proposition.** Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ , on peut définir, pour tout  $i$ , le projecteur  $p_i$  sur  $F_i$  de direction  $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k$ . Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

## 1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  des bases respectives de  $F_1, \dots, F_p$ . On note  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  la concaténation de ces  $p$  bases.

Si les  $F_i$  sont en somme directe, alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ , dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Si on organise et regroupe les vecteurs de  $\mathcal{B}$  de façon à écrire  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ , alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

**Théorème.**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de dimension finies de  $E$ . Alors on a :

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les  $F_i$  sont en somme directe.

## 1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

**Définition.** Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits **supplémentaires** dans  $E$  si et seulement si  $E = F \oplus G$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

**Exemple.** Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exemple.** On note  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Rappel.** Caractérisation par décomposition unique.

En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.

En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

**Définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ . On appelle **base de  $E$  adaptée à  $F$**  toute base de  $E$  obtenue en complétant une base de  $F$  en une base de  $E$ .

**Remarque.** Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.

**Rappel.** Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

## 2 Applications linéaires, endomorphismes

### 2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires

**Proposition.** Soit  $E, F, G$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$  est bilinéaire.  
 $(u, v) \mapsto u \circ v$

**En passant.**

$$u \circ v = 0 \iff \text{Im } v \subset \text{Ker } u$$

**Proposition.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un espace vectoriel.

Lorsque  $E$  et  $F$  sont deux espaces de dimensions finies respectives  $n$  et  $p$ , alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie  $n \times p$ .

**Remarque.** En particulier, l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  des formes linéaires sur  $E$  est un espace vectoriel. On le note parfois  $E^*$  et il s'appelle l'**espace dual** de  $E$ . Son étude est hors programme.

Lorsque  $E$  est de dimension finie,  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est de même dimension finie.

**Proposition.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$  est une algèbre, non commutative et non intègre.

**Proposition.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $(\text{GL}(E), \circ)$  est un groupe, non commutatif.

### 2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base

**Théorème.**

Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base d'un espace vectoriel  $E$ ,  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $F$ , indexée par le même ensemble  $I$ , alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

**Remarque.** Ce théorème est à la base de la notion de matrice représentant une application linéaire.

**Corollaire.** Avec les notations précédentes :

- $u$  est surjective si et seulement si  $(f_i)_{i \in I}$  engendre  $F$ .
- $u$  est injective si et seulement si  $(f_i)_{i \in I}$  est libre.

**Proposition.** Une application linéaire  $E \rightarrow F$  est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (resp. toute) base de  $E$  en une base de  $F$ .

**Corollaire.** Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

## 2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

**Théorème.**

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ . Pour tout  $i$ , on considère  $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ .  
Alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_i} = u_i$  pour tout  $i$ .

**Corollaire.** Deux applications linéaires qui coïncident sur tous les  $F_i$  sont égales. On peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque  $F_i$ .

**Remarque.** La donnée, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , de  $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$  permet donc de définir sans ambiguïté une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  définie sur  $E$  tout entier.

## 2.4 Rang

**Définition.** Soit  $f$  une application linéaire. Lorsque son image est dimension finie, on dit que  $f$  est de rang fini, et on définit le **rang de  $f$**  par :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$$

**Proposition.** Le rang est inchangé lorsque l'on compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

**Théorème du rang, forme géométrique.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire, et  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ . Alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } u$ , i.e. :

$$\begin{aligned} \tilde{u} : S &\rightarrow \text{Im}(u) \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Théorème du rang.**

En particulier, si  $E$  est de dimension finie, alors  $u$  est de rang fini et :

$$\dim E_{\text{source}} = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u) \quad \text{soit encore} \quad \text{rg}(u) = \dim E_{\text{source}} - \dim(\text{Ker } u)$$

**Corollaire.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire, avec  $E$  et  $F$  de même dimension finie. Alors  $u$  est bijective si et seulement si  $u$  est injective, si et seulement si  $u$  est surjective.

Le résultat s'applique en particulier pour les endomorphismes en dimension finie.

### 3 Annexes

#### 3.1 Un mot sur les équations linéaires

On s'intéresse aux **équations linéaires**, de la forme :

$$u(x) = b$$

où  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $b \in F$  et d'inconnue  $x \in E$ .

**Proposition.** L'ensemble des solutions est :

- soit vide ;
- soit de la forme  $x_0 + \text{Ker } u$ , où  $x_0$  est une solution particulière de l'équation.

*Preuve.* On suppose qu'il existe  $x_0$  solution particulière. On a alors :

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff u(x) = b \\ &\iff u(x) = u(x_0) \text{ car } u(x_0) = b \\ &\iff u(x - x_0) = 0 \text{ par linéarité de } u \\ &\iff x - x_0 \in \text{Ker } u \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{x_0 + t, t \in \text{Ker } u\}$$

que l'on note  $x_0 + \text{Ker } u$ .  $\square$

**Remarque.** L'ensemble  $x_0 + \text{Ker } u$  n'est pas un espace vectoriel, mais le translaté d'un espace vectoriel, que l'on appelle **espace affine**.

**Exemple.** Déterminer toutes les suites réelles  $(u_n)_n$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 3$$

**Exemple.** Déterminer toutes les couples  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

**Exemple.** Déterminer toutes les fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  telles que :

$$2ty' + y = \frac{1}{t}$$

**Exemple.** Déterminer toutes les fonctions  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Endomorphisme nilpotent et base

#### 210.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $f$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $n$ , i.e.  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que :

$$(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base ?

### Noyaux itérés

#### 210.2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On rappelle que, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$ .

- (a) Montrer que la suite  $(\text{Ker } f^p)_p$  est croissante pour l'inclusion.
- (b) Justifier l'existence d'un plus petit  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Ker } f^r = \text{Ker } f^{r+1}$ .
- (c) Montrer que la suite  $(\text{Ker } f^p)_p$  est constante à partir du rang  $r$ .
- (d) Démontrer que :

$$E = \text{Ker } f^r \oplus \text{Im } f^r$$

- (e) Que peut-on dire de la suite  $(\text{Im } f^p)_p$  ?

### Une astuce à avoir vue

#### 210.3

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $(x, f(x))$  est liée. Montrer que  $f$  est une homothétie.

## Exercices du CCINP

**210.4**
 55.1

Soit  $a$  un nombre complexe.

On note  $E$  l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$  avec  $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ .

1. (a) Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de  $E$ .

**210.5**
 59.12

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose :  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ .

1. Démontrer que  $f$  est bijectif de deux manières :

(a) sans utiliser de matrice de  $f$ ,

2. Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P$  tel que  $f(P) = Q$ .

**Indication :** si  $P \in E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?

**210.6**
 60

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $f(M) = AM$ .

1. Déterminer une base de  $\text{Ker } f$ .
2.  $f$  est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de  $\text{Im } f$ .
4. A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  ?

**210.7**
 62.123

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ .

1. Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
2. Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  :
3. Dans cette question, on suppose que  $E$  est de dimension finie. Prouver que  $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .

**210.8**
 64

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .

1. Démontrer que :  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
2. (a) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .
- (b) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .

**210.9**
 71

Soit  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D$  la droite d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
2. Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .  
Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

**210.10**
 93.1

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ .

On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$ .

## Exercices

### 210.11

On considère :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(a + b, a, a + 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Déterminer  $F \cap G$ .

### 210.12

On note  $F$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles qu'il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , et déterminer sa dimension.

### 210.13

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **à support compact** s'il existe  $A \geq 0$  tel que  $f$  soit nulle en dehors de  $[-A, A]$ .

Montrer que l'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

### 210.14

Montrer que :

$$\text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

### 210.15

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $H_1, \dots, H_k$  des hyperplans de  $E$ . Montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) \geq n - k$$

### 210.16

Soit  $H$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^4$  défini par l'équation :

$$x + 2y - z + 3t = 0$$

- (a) Déterminer une base de  $H$ .
- (b) Exhiber un supplémentaire de  $H$ .

On se place maintenant dans le cas plus général où  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , défini par l'équation :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

- (c) Montrer que  $\text{Vect}((a_1, \dots, a_n))$  est un supplémentaire de  $H$ .

### 210.17

Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la famille  $(X^k(a - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est libre dans  $\mathbb{C}[X]$ .

### 210.18

Soit  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  des scalaires distincts. Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on définit :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Montrer que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est libre dans  $\mathbb{K}[X]$ .

### 210.19

Dans l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on définit pour tout réel  $\lambda$  :

$$e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$$

Montrer que  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est libre.

### 210.20

Soit  $u_1, \dots, u_n, u_{n+1} \in E$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- (a) Montrer que, si  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre et  $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  alors  $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$  est libre.
- (b) Montrer que, si  $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$  est génératrice et  $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est génératrice.

**210.21**

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on considère le plan  $P$  d'équation  $x - y + z = 0$  et la droite  $D = \text{Vect}(u)$  où  $u = (1, 3, 1)$ .

- (a) On note  $p$  la projections sur  $P$  parallèlement à  $D$ . Exprimer  $p(x, y, z)$ .
- (b) On note  $s$  la symétrie par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ . Exprimer  $s(x, y, z)$ .

**210.22**

Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

- (a) Montrer que  $\text{Ker } p = \text{Ker } q$  si et seulement si  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$ .
- (b) Énoncer une condition semblable pour traduire  $\text{Im } p = \text{Im } q$ .

**210.23**

Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

- (a) Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
- (b) Préciser, dans ce cas,  $\text{Im}(p + q)$  et  $\text{Ker}(p + q)$ .

**210.24**

Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ , on définit pour  $k = 0, 1, 2$  :

$$F_k = \{f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \forall z \in \mathcal{C}, f(jz) = j^k f(z)\}$$

Montrer que la somme  $F_0 + F_1 + F_2$  est directe.

**210.25**

Soit  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  et les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in E, f \text{ constante}\} \\ F_2 &= \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \\ F_3 &= \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\} \end{aligned}$$

Montrer que :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

**210.26**

Dans l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , on considère les sous-espaces :

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0\} \text{ et } G = \{g \in E, g \text{ constante}\}$$

Montrer que  $F \oplus G = E$ .

**210.27**

Dans l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , on considère :

$$F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E, g \text{ affine}\}$$

Montrer que  $F \oplus G = E$ .

**210.28**

Soit  $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , et  $P$  (resp.  $I$ ) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que  $P \oplus I = E$ .

**Petits problèmes d'entraînement****210.29** 

On note  $E = \mathbb{K}[X]$ . Pour  $P \in E$ , on note :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer le degré de  $\varphi(P)$  en fonction de celui de  $P$ .
- (c) Déterminer  $\text{Ker } \varphi$ .

- (d) On pose  $\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \varphi(X^n) \end{cases}$ .

Montrer que pour tout  $p$ , la famille  $(Q_0, \dots, Q_p)$  est une base de  $\mathbb{K}_p[X]$ .

- (e) Montrer que  $\text{Im } \varphi$  est un hyperplan de  $E$ .  
Vérifier que  $\text{Im } \varphi$  est le noyau de la forme linéaire  $\theta$  définie par :

$$\theta(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

**210.30** 

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel, et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$N_k = \text{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \text{Im}(f^k)$$

- (a) Montrer que  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante pour l'inclusion, et que  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- (b) Justifier que  $\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$  et  $\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ .
- (c) On suppose dans cette question que  $f \in \text{GL}(E)$ . Déterminer  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{C}$ .

On suppose dorénavant que  $E$  est de dimension finie.

- (d) Expliquer pourquoi les suites  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont stationnaires. On note  $r$  et  $s$  respectivement les plus petits entiers à partir desquels  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont constantes.
- (e) Montrer que  $r = s$ .
- (f) Montrer que  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{C} = E$ .
- (g) Démontrer que les endomorphismes induits  $f_{\mathcal{N}}$  et  $f_{\mathcal{C}}$  sont respectivement nilpotent et bijectif.

**210.31**

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  espace vectoriel. On suppose  $u$  nilpotent d'indice  $p$ . On définit :

$$e^u = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k$$

- (a) Montrer que, pour tout  $x$  tel que  $u^k(x) \neq 0$ ,  $(x, u(x), \dots, u^k(x))$  est une famille libre.

- (b) Déterminer  $\text{Ker}(e^u - \text{Id}_E)$ .

**210.32**

On souhaite démontrer que, pour  $P \in \mathbb{C}[X]$  :

$$\int_0^\pi P(e^{it}) i e^{it} dt = - \int_{-1}^1 P(u) du$$

- (a) Quelle idée faut-il se retenir d'avoir, et pourquoi ?
- (b) Que dire des applications  $\varphi : P \mapsto \int_0^\pi P(e^{it}) i e^{it} dt$  et  $\psi : P \mapsto \int_{-1}^1 P(u) du$  ?
- (c) Démontrer l'égalité demandée, par un calcul simple.

**210.33**

On considère  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  des réels distincts. Montrer qu'il existe  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

**210.34**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une droite vectorielle  $D$  telle que  $H \oplus D = E$ .
- (ii) Il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  telle que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ .

On dit alors que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

On peut remarquer que, lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , c'est encore équivalent à  $\dim(E) = n - 1$ .

**210.35**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  satisfaisant :

$$\text{Ker } u = F \text{ et } \text{Im } u = G$$

**210.36**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

- (a)  $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$
- (b)  $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$

**210.37**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $e = \operatorname{Id}_E$  et  $G$  un sous-groupe fini de  $\operatorname{GL}(E)$  et  $n = \operatorname{Card}(G)$ . On note :  $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$ .

- (a) Montrer que :  $\forall h \in G, p \circ h = p$ .
- (b) En déduire que  $p$  est un projecteur de  $E$ .
- (c) Établir :  $\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e) = \operatorname{Im}(p)$ .
- (d) En déduire que :

$$\dim \left( \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$$

**210.38**

Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . On note  $h = g \circ f$ . À quelles conditions  $h$  est-elle un isomorphisme ?

**210.39**

Soit  $u$  un endomorphisme non bijectif d'un espace  $E$  de dimension finie. Montrer qu'il existe  $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$  tel que  $v = \varphi \circ u$  soit nilpotent.

**210.40**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E_p$  l'ensemble des suites  $(u_n)_n$  complexes et  $p$ -périodiques, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$$

(a) Montrer que  $E_p$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et calculer sa dimension.

(b) Déterminer une base de  $E_p$  formée uniquement de suites géométriques.

**210.41**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel strict de  $E$ .

- (a) Montrer que  $F$  peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
- (b) Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire ?

**210.42**

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$P_k = \frac{X(X-1) \dots (X-k+1)}{k!}$$

- (a) Montrer que la famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .
- (b) Vérifier que,  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, P_k(m)$  est entier.
- (c) Déterminer tous les polynômes  $P$  prenant des valeurs entières sur chaque entier.

**210.43**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$uv = 0 \text{ et } u + v \in \operatorname{GL}(E)$$

si et seulement si  $\operatorname{Im} u$  et  $\operatorname{Ker} u$  sont supplémentaires.

**210.44**

Soit  $f_1, \dots, f_n$  des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ . On suppose :

$$f_1 + \dots + f_n = \operatorname{Id}_E \text{ et } \forall i \neq j, f_i \circ f_j = 0$$

- (a) Montrer que chaque  $f_i$  est un projecteur.
- (b) Montrer que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im}(f_i) = E$$

**210.45**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels tels que :

$$F_1 + \dots + F_n = E$$

Montrer qu'il existe  $G_1, \dots, G_n$  sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$G_1 \oplus \dots \oplus G_n = E \text{ et } \forall i, G_i \subset F_i$$

**210.46**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . On note  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et on pose, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$G_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ \text{et } H_i = \{f \in \mathcal{L}(E), G_i \subset \text{Ker}(f)\}$$

(a) Montrer que les  $H_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E)$ .

(b) Montrer que :  $\bigoplus_{i=1}^n H_i = \mathcal{L}(E)$ .

**210.47**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $F$ . On considère  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $G$  et, pour tout  $a = (a_1, \dots, a_p) \in F^p$ , on note :

$$G_a = \text{Vect}(e_i + a_i)_{1 \leq i \leq p}$$

Montrer que les espaces  $G_a$  déterminent tous les espaces supplémentaires de  $F$ .