Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne réprésentation géométrique des espaces vectoriels ?
4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?
7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?
8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?
9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?
10. Que désigne la notation $\mathrm{Vect}(A)$?
11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?
12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?
13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?
14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann.

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?
    D'autres termes dans le même contexte ?
18. Qu'est-ce que le **noyau** de u, à quoi sert-il ?
19. Qu'est-ce que l'**image** de u, comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?
21. Que signifie $u \circ v = 0$?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?
23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i = \big\{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\},\ x_i \in E_i\big\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$
$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \dots, n_p$, alors $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p.

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$$

1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition. Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les F_i **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les F_i sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ pour désigner $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Remarque. *Ça signifie que la seule façon de construire 0_E comme somme de vecteurs des F_i est de l'écrire comme somme de 0_{F_i}.*

Remarque. *Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.*

Théorème.

En conservant les notations précédentes, les F_i sont en somme directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ se décompose **de façon unique** selon les F_i, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists!(x_1,\dots,x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

Remarque. *Lorsque $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de x selon $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Si les F_i sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de* ***la décomposition de*** *x selon $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*

Remarque. *On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :*

$$\forall i \in \{1,\dots,p\},\ F_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} F_j\Big) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

1.4 Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe

Proposition. Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on peut définir, pour tout i, le projecteur p_i sur F_i de direction $\bigoplus_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{p} F_k$. Alors :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{p} p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

Proposition. Soit $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1,\dots,F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces p bases.

Si les F_i sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

Théorème.

Soit $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de E. Alors on a :

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.

1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappel. Caractérisation par décomposition unique.
En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.
En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E.

Remarque. *Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.*

Rappel. Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

2 Applications linéaires, endomorphismes

2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires

Proposition. Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ (u,v) & \mapsto & u \circ v \end{array}$ est bilinéaire.

En passant.

$$u \circ v = 0 \iff \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Proposition. Soit E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Lorsque E et F sont deux espaces de dimensions finies respectives n et p, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie $n \times p$.

Remarque. *En particulier, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un espace vectoriel. On le note parfois E^* et il s'appelle l'**espace dual** de E. Son étude est hors programme.*
Lorsque E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est de même dimension finie.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre, non commutative et non intègre.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif.

2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base

Théorème.

> Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base d'un espace vectoriel E, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F, indexée par le même ensemble I, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Remarque. *Ce théorème est à la base de la notion de matrice représentant une application linéaire.*

Corollaire. Avec les notations précédentes :

- u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ engendre F.
- u est injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est libre.

Proposition. Une application linéaire $E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si elle transorme une (resp. toute) base de E en une base de F.

Corollaire. Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

Théorème.

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout i, on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.

Corollaire. Deux applications linéaires qui coïncident sur tous les F_i sont égales. On peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque F_i.

Remarque. *La donnée, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, de $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ permet donc de définir sans ambiguité une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie sur E tout entier.*

2.4 Rang

Définition. Soit f une application linéaire. Lorsque son image est dimension finie, on dit que f est de rang fini, et on définit le **rang de** f par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

Proposition. Le rang est inchangé lorsque l'on compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Théorème du rang, forme géométrique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$, i.e. :

$$\widetilde{u} : \begin{array}{ccc} S & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème du rang.

En particulier, si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et :

$$\dim E_{\text{source}} = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) \quad \text{soit encore} \quad \mathrm{rg}(u) = \dim E_{\text{source}} - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$$

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, avec E et F de même dimension finie. Alors u est bijective si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.
Le résultat s'applique en particulier pour les endomorphismes en dimension finie.

3 Annexes

3.1 Un mot sur les équations linéaires

On s'intéresse aux **équations linéaires**, de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$ et d'inconnue $x \in E$.
Proposition. L'ensemble des solutions est :

- soit vide ;
- soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Preuve. On suppose qu'il existe x_0 solution particulière. On a alors :

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff u(x) = b \\ &\iff u(x) = u(x_0) \text{ car } u(x_0) = b \\ &\iff u(x - x_0) = 0 \text{ par linéarité de } u \\ &\iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{x_0 + t, t \in \operatorname{Ker} u\}$$

que l'on note $x_0 + \operatorname{Ker} u$. □

Remarque. *L'ensemble $x_0 + \operatorname{Ker} u$ n'est pas un espace vectoriel, mais le translaté d'un espace vectoriel, que l'on appelle* ***espace affine****.*

Exemple. Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_n$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 3$$

Exemple. Déterminer toutes les couples $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Exemple. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ telles que :

$$2ty' + y = \frac{1}{t}$$

Exemple. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Endomorphisme nilpotent et base

21.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme nilpotent d'indice n, i.e. $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x\right) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Noyaux itérés

21.2

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_p = \mathrm{Im}(f^p) \text{ et } K_p = \mathrm{Ker}(f^p)$$

où $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

(a) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (resp. $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$) est décroissante (resp. croissante) pour l'inclusion.

On suppose maintenant que E est de dimension finie.

(b) Justifier l'existence de $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_{r+1} = I_r$.

(c) Montrer que les deux suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang r.

(d) Justifier que :

$$I_r \oplus K_r = E$$

Une astuce à avoir vue

21.3

Soit f un endomophisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est un homothétie.

Exercices du CCINP

21.4 CCINP 55.1

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

21.5 CCINP 59.12

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

21.6 CCINP 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

21.7 CCINP 62.123

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

21.8 CCINP 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

21.9 CCINP 71

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

21.10 CCINP 93.1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u = E$.

Exercices

21.11

On considère :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(a+b, a, a+3b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $F \cap G$.

21.12

On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et déterminer sa dimension.

21.13

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **à support compact** s'il existe $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.
Montrer que l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

21.14

Montrer que :

$$\operatorname{Vect}\Big(\big(x \mapsto \cos(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \operatorname{Vect}\Big(\big(x \mapsto \cos^n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

21.15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $H_1, \dots, H_k$ des hyperplans de E. Montrer que :

$$\dim\Big(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\Big) \geqslant n - k$$

21.16

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation :

$$x + 2y - z + 3t = 0$$

(a) Déterminer une base de H.

(b) Exhiber un supplémentaire de H.

On se place maintenant dans le cas plus général où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, défini par l'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

(c) Montrer que $\operatorname{Vect}\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ est un supplémentaire de H.

21.17

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\big(X^k(a-X)^{n-k}\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

21.18

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

21.19

Dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit pour tout réel λ :

$$e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.

21.20

Soit $u_1, \dots, u_n, u_{n+1} \in E$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

(b) Montrer que, si $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice.

21.21

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x - y + z = 0$ et la droite $D = \text{Vect}(u)$ où $u = (1,3,1)$.

(a) On note p la projections sur P parallèlement à D. Exprimer $p(x,y,z)$.

(b) On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Exprimer $s(x,y,z)$.

21.22

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

(b) Énoncer une condition semblable pour traduire $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

21.23

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

(a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

(b) Préciser, dans ce cas, $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)$.

21.24

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, on définit pour $k = 0, 1, 2$:

$$F_k = \{f \,:\, \mathcal{C} \to \mathcal{C},\ \forall z \in C,\ f(\mathrm{j}z) = \mathrm{j}^k f(z)\}$$

Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2$ est directe.

21.25

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ et les sous-espaces vectoriels :

$$F_1 = \{f \in E,\ f \text{ constante}\}$$
$$F_2 = \{f \in E,\ \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\}$$
$$F_3 = \{f \in E,\ \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0\}$$

Montrer que :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

21.26

Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère les sous-espaces :

$$F = \{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\} \text{ et } G = \{g \in E,\ g \text{ constante}\}$$

Montrer que $F \oplus G = E$.

21.27

Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère :

$$F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E,\ g \text{ affine}\}$$

Montrer que $F \oplus G = E$.

21.28

Soit $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et P (resp. I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que $P \oplus I = E$.

Petits problèmes d'entrainement

21.29 ✍

On note $E = \mathbb{K}[X]$. Pour $P \in E$, on note :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.

(c) Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$.

(d) On pose $\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = \varphi(X^n) \end{cases}$.
Montrer que pour tout p, la famille $(Q_0, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

(e) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de E.
Vérifier que $\operatorname{Im}\varphi$ est le noyau de la forme linéaire θ définie par :

$$\theta(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

21.30 ✍

Soit E un K-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N_k = \operatorname{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \operatorname{Im}(f^k)$$

(a) Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, et que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Justifier que $\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $\mathcal{C} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f.

(c) On suppose dans cette question que $f \in \mathrm{GL}(E)$. Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

(d) Expliquer pourquoi les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires. On note r et s respectivement les plus petits entiers à partir desquels $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont constantes.

(e) Montrer que $r = s$.

(f) Montrer que $\mathcal{N} \oplus \mathcal{C} = E$.

(g) Démontrer que les endomorphismes induits $f_{\mathcal{N}}$ et $f_{\mathcal{C}}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.

21.31

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel. On suppose u nilpotent d'indice p. On définit :

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k$$

(a) Montrer que, pour tout x tel que $u^k(x) \neq 0$, $\big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$ est une famille libre.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$.

21.32

On souhaite démontrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$\int_0^\pi P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^1 P(u)\,\mathrm{d}u$$

(a) Quelle idée faut-il se retenir d'avoir, et pourquoi ?

(b) Que dire des applications $\varphi \ : \ P \mapsto \displaystyle\int_0^\pi P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ et $\psi \ : \ P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 P(u)\,\mathrm{d}u$?

(c) Démontrer l'égalité demandée, par un calcul simple.

21.33

On considère $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

21.34

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$.

(ii) Il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

On dit alors que H est un hyperplan de E.
On peut remarquer que, lorsque E est de dimension finie n, c'est encore équivalent à $\dim(E) = n - 1$.

21.35

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant :

$$\operatorname{Ker} u = F \text{ et } \operatorname{Im} u = G$$

21.36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(a) $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$

(b) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$

21.37

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On note $h = g \circ f$. À quelles conditions h est-elle un isomorphisme ?

21.38

Soit u un endomorphisme non bijectif d'un espace E de dimension finie. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $v = \varphi \circ u$ soit nilpotent.

21.39

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E_p l'ensemble des suites $(u_n)_n$ complexes et p-périodiques, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$$

(a) Montrer que E_p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et calculer sa dimension.

(b) Déterminer une base de E_p formée uniquement de suites géométriques.

21.40

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel strict de E.

(a) Montrer que F peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans.

(b) Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire ?

21.41

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

(a) Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $P_k(m)$ est entier.

(c) Déterminer tous les polynômes P prenant des valeurs entières sur chaque entier.

21.42

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$uv = 0 \text{ et } u + v \in \mathrm{GL}(E)$$

si et seulement si $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires.

21.43

Soit $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E. On suppose :

$$f_1 + \dots + f_n = \mathrm{Id}_E \text{ et } \forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = 0$$

(a) Montrer que chaque f_i est un projecteur.

(b) Montrer que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(f_i) = E$$

21.44

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que :

$$F_1 + \dots + F_n = E$$

Montrer qu'il existe $G_1, \dots, G_n$ sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$G_1 \oplus \dots \oplus G_n = E \text{ et } \forall i,\ G_i \subset F_i$$

21.45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et on pose, pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$G_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$$
$$\text{et } H_i = \{f \in \mathcal{L}(E),\ G_i \subset \operatorname{Ker}(f)\}$$

(a) Montrer que les H_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} H_i = \mathcal{L}(E)$.

21.46

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de G. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de G et, pour tout $a = (a_1, \dots, a_p) \in F^p$, on note :

$$G_a = \mathrm{Vect}\left(e_i + a_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$$

Montrer que les espaces G_a déterminent tous les espaces supplémentaires de F.