Déterminants

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. Elle est aussi antisymétrique.

1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E$$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
- $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$ et $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A.

Remarque. *C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$), donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \dots, C_n)$.

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant

4 Calcul de déterminants

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour tout i, j, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij}.
On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème.

Le développement par rapport à la j-ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i-ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ligne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ. Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ligne i.

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque. *Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double :* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$.

5 Annexes

5.1 Annexe : applications n-linéaires alternées

Définition.

- Une application

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ E^n & \to & F \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

est dite **n-linéaire** lorsque, pour tout i, tout $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$, l'application :

$$x \mapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)$$

est linéaire.
On parle de **forme n-linéaire** lorsque $f : E^n \to \mathbb{K}$.

- Elle est dite **alternée** si on a l'implication :

$$\exists i \neq j \text{ t.q. } x_i = x_j \implies f(x_1,\dots,x_n) = 0$$

- Elle est dite **antisymétrique** si :

$$\forall i \neq j,\ f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots) = -f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots)$$

c'est-à-dire, pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -f(x_1,\dots,x_n)$$

Proposition. f est antisymétrique si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_n)$$

Proposition.

- Si f est alternée, alors f est antisymétrique.
- Si f est antisymétrique et que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors f est alternée.

Théorème de structure.

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'espace des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Plus précisément.

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base. Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1,\dots,e_n) = 1$. Et toute forme n-linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base. L'unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que :

$$\phi(e_1,\dots,e_n) = 1$$

est appelée **déterminant dans la base $\mathcal{B}$**, et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Proposition. Soit ϕ une forme n-linéaire alternée sur un espace un espace vectoriel de dimension n, et on suppose que ϕ n'est pas nulle. Alors, pour toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E :

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = 0 \iff (x_1,\dots,x_n) \text{ est liée}$$

Remarque. *La propriété généralise le résultat annoncé pour le déterminant dans une base $\mathcal{B}$.*

Preuve.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $(x_1,\dots,x_n)$ liée, donc l'un des vecteur est CL des autres :

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i x_i$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \phi(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) &= \phi\Big(x_1,\dots,\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i x_i,\dots,x_n\Big) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i \phi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \\ &\qquad \text{par } n\text{-linéarité} \\ &= 0 \text{ car } \phi \text{ alternée} \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $(x_1,\dots,x_n)$ libre, donc c'est une base de E, notée $\mathcal{B}$. Comme ϕ est une forme n-linéaire alternée non nul, il existe λ non nul tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Et donc $\phi(x_1,\dots,x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda \neq 0$.

□

5.2 Annexe de l'annexe : démonstration du théorème de structure

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n-linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve pour $n = 2$. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ dans E, et ϕ une forme 2-linéaire alternée sur E. On calcule :

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)\\ &= x_1y_1\phi(e_1, e_1) + x_1y_2\phi(e_1, e_2)\\ &\quad + x_2y_1\phi(e_2, e_1) + x_2y_2\phi(e_2, e_2) \text{ par 2-linéarité}\\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\phi(e_1, e_2) \text{ car alterné et antisymétrique}\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$, et la seule forme 2-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, e_2) = 1$ est $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$. □

Preuve pour $n = 3$. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ dans E, et ϕ une forme 3-linéaire alternée sur E. On calcule :

$$\begin{aligned}&\phi(x, y, z)\\ &= \phi(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3, y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3, z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3)\\ &= x_1y_1z_1\phi(e_1, e_1, e_1) + \dots \text{ par 3-linéarité}\\ &\qquad \text{(27 termes, dont plein sont nuls car } \phi \text{ alternée)}\\ &= x_1y_2z_3\phi(e_1, e_2, e_3)+x_1y_3z_2\phi(e_1, e_3, e_2)+x_2y_2z_3\phi(e_2, e_2, e_3)\\ &\quad +x_2y_3z_2\phi(e_2, e_3, e_2)+x_3y_2z_3\phi(e_3, e_2, e_3)+x_3y_3z_2\phi(e_3, e_3, e_2)\\ &= (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3\\ &\qquad - x_3y_2z_1)\phi(e_1, e_2, e_3) \text{ par antisymétrie}\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à $(x, y, z) \mapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$, et la seule forme 3-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, e_2, e_3) = 1$ est $(x, y, z) \mapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$. □

Preuve pour n quelconque. Soit E espace de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, ϕ une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire que, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}\Big)\\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,n]\!]^n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}\phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})\\ &= \sum_{\sigma\,:\,[\![1,n]\!]\to[\![1,n]\!]} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})\\ &\qquad \text{en posant } \sigma(k) = i_k\\ &= \sum_{\substack{\sigma\,:\,[\![1,n]\!]\to[\![1,n]\!]\\ \sigma \text{ bijective}}} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})\\ &\qquad \text{car } \phi \text{ est alternée}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\varepsilon(\sigma)\phi(e_1, \dots, e_n)\\ &\qquad \text{car } \phi \text{ est antisymétrique}\\ &= \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\Big)\phi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$, et la seule forme n-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

□

5.3 Annexe : indépendance du choix de la base pour le calcul de $\det(u)$

Construction. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ de E. L'application :

$$\phi \;:\; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Ce λ est unique, on l'appelle **le déterminant de** u et on le note $\det(u)$.

Remarque. *On retient : Pour toute base $\mathcal{B}$ et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$:*

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on calcule :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}'}(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))\\ &\qquad \text{par changement de base}\\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1), \dots, x_n)\\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1), \dots, x_n)\\ &\qquad \text{par changement de base}\end{aligned}$$

C'est donc bien le même coefficient λ pour la base $\mathcal{B}'$. □

5.4 Rappel : comatrice, formule pour l'inverse

Définition. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = \Big((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur relatif au coefficient (i, j), c'est-à-dire le déterminant de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la ligne i et la colonne j.

Proposition.

$$A \times (\mathrm{Com}(A))^\top = (\mathrm{Com}(A))^\top \times A = \det(A)\; I_n$$

et donc, si $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^\top$$

Preuve.

- Dans le produit $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top$, le coefficient (i,i) est :
$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$$
qui vaut $\det(A)$, par les formules de développement.
- Dans le produit $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top$, le coefficient (i,j) pour $i \neq j$ est :
$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}$$
qui vaut, par les formules de développement, le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ème ligne par sa i-ème ligne, ce qui en fait une matrice à deux lignes égale, dont à déterminant nul.

Ainsi $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top = \det(A)\ I_n$. Le calcul est analogue pour l'autre produit. □

5.5 Annexe : une preuve élégante du calcul du déterminant de Vandermonde

Proposition.

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Preuve.
On suppose que $(a_1, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts. On forme :

$$P(t) = V(a_1, \dots, a_n, t) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & t & t^2 & \dots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, $P(t)$ apparaît comme polynomiale en t :

$$P(t) = \clubsuit + \clubsuit\, t + \cdots + \clubsuit\, t^{n-1} + V(a_1, \dots, a_n) t^n$$

Ce polynôme de degré (inférieur ou) égal à n admet n racines distinctes : $a_1, \dots, a_n$ et on connait son coefficient dominant. On a donc la relation :

$$V(a_1, \dots, a_n, t) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (t - a_k)$$

et donc la relation de récurrence :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k)$$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Un déterminant tridiagonal

23.1

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.

Exercices

23.2

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\det\left(\sin(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

23.3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice définie par $A_n = (\mathrm{Max}(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\det(A_n)$ en fonction de n.

23.4

On note $M_n(x)$ la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ayant des x sur la diagonale, des 1 juste en dessous et au-dessus de la diagonale, et des 0 partout ailleurs. On fixe $\theta \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $D_n = \det(M_n(2\cos\theta)$ vérifie, pour $n \geqslant 3$:

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}$$

où a et b sont à déterminer.

(b) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $D_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

(c) Déterminer les valeurs propres de $M_n(x)$. Est-elle diagonalisable ?

23.5

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

23.6

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.

23.7

Calculer, pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

23.8

(a) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $A(X) = (a_{ij} + X)_{ij}$. Montrer que $\det A(X)$ est un polynôme en X, de degré au plus 1.

(b) Utiliser la question précédente pour calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & \dots & c \\ b & a & c & \dots & c \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

(c) En déduire la valeur du déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & c \\ b & a & b & \dots & b & c \\ b & b & a & \dots & b & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & & \ddots & a & c \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

On pourra le considérer comme un polynôme en c.

Petits problèmes d'entrainement

23.9 ✍

Pour $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on pose :

$$f(P) = (2n+1)XP - (X^2-1)P'$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

(b) Calculer $\det(f)$.

23.10 ✍

Soit a, b, c trois scalaires. On considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix}_{[n]}$$

(a) Calculer $D_n(a,a,c)$ en fonction de a, c et n.

(b) Montrer que $\varphi : x \mapsto D_n(a+x, b+x, c+x)$ est affine.

(c) En déduire, pour $a \neq b$, $D_n(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et n.

23.11

(a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Indication : on montrera d'abord que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A + \mathrm{i}B & \mathrm{i}B \\ 0 & -A + \mathrm{i}B \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que :

$$\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$$

(c) Trouver un contre-exemple au résultat précédent si A et B ne commutent pas.

23.12

Soit u et v deux endomorphismes d'un e.v. de dimension finie n. On suppose que u et v commutent, et que v est nilpotent. On va montrer par récurrence sur la dimension n que :

$$\det(u+v) = \det u$$

(a) Traiter le cas où $n = 1$ et le cas où $v = 0$.

(b) Pour $n \geqslant 2$ et $v \neq 0$, former les matrices u et v dans une base adaptée à $\operatorname{Im} v$.

(c) Conlure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v à $\operatorname{Im} v$.

23.13

Soit $a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On considère :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On introduit le polynôme :

$$P = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\dots(\lambda_n - X)$$

et la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(a) Montrer que $x \mapsto \det(M_{a,b} + xJ)$ est affine.

(b) En déduire une expression de $\det(M_{a,b})$ lorsque $a \neq b$, en fonction de P.

(c) Calculer $\det(M_{a,a})$.

23.14

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indexés de 0 à n, et dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \binom{i+j}{j}$$

23.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$f(M) = AM$$

23.16

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i, j. Calculer :

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

23.17

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\begin{cases} |a_{11}| + \cdots + |a_{1n}| \leqslant 1 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}| \leqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que $|\det(A)| \leqslant 1$.

23.18

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^3 + f = 0$$

(a) Vérifier que noyau et image de f sont supplémentaires.

(b) Montrer que $\mathrm{rg}(f)$ est pair.

23.19

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_n) = \mathrm{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

23.20

Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Calculer le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.

(b) Déterminer $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big)$.