Diagonalisation

Je me souviens

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quel est l'endomorphisme canoniquement associé ?
2. Que signifie : « $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe » ?

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u lorsqu'il existe x non nul tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

Remarque. *Insistons : il faut qu'il existe un vecteur **non nul** tel que...*

Remarque. *Un vecteur propre, c'est un vecteur non nul tel que $u(x)$ est colinéaire à x.*

Définition. On appelle **équation aux éléments propres** l'équation :

$$u(x) = \lambda x$$

où l'on cherche les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions x non nuls à l'équation, et on cherche ces solutions aussi.

Définition. Si λ est une valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre associé à** λ l'espace :

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \\ &= \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} \end{aligned}$$

1.2 Propriétés

Proposition. x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(x)$ est stable par u.

Théorème.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. On l'écrit donc :

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$$

Théorème.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i deux à deux distinctes, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Tout sous-espace propre de u est stable par v
- $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v

1.3 Exemples

Exemple. Soit E un espace vectoriel. Déterminer les éléments propres de :

1. p projeteur de E
2. s symétrie de E
3. h homothétie de rapport k

Exemple. Déterminer les éléments propres de :

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

2. $v : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

Exemple. Donner un exemple simple d'endomorphisme du plan euclidien usuel qui n'a aucune valeur propre.

1.4 En dimension finie

Remarque. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x \\ &\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ non injective} \\ &\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ non bijective} \qquad \text{car } u \text{ endomorphisme de } E \text{ qui est de dimension finie.} \end{aligned}$$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre de** u :

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(u) &= \{\lambda \in \mathbb{K},\ u - \lambda \operatorname{Id}_E \notin \operatorname{GL}(E)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \text{ valeur propre de } u\} \end{aligned}$$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \operatorname{GL}(E) \iff 0 \notin \operatorname{Sp}(u)$$

2 Éléments propres d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :

$$u_A : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Ainsi, λ est une **valeur propre de** A s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre de** A**, associé à** λ. L'espace $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'**espace propre associé à** λ, et l'équation :

$$AX = \lambda X$$

est l'**équation aux éléments propres**. Le **spectre de** A, noté $\operatorname{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

2.2 Critère d'inversibilité

Proposition. Avec les notations de la défnition :

$$A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \operatorname{Sp}(A)$$

2.3 Un mot sur le corps de base

Remarque. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc chercher les valeurs propres réelles ou les valeurs propres complexes de A. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et on a :*

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme

3.1 Lien entre matrice et endomorphisme

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$$

- Les vecteurs propres de A sont les matrices des vecteurs propres de u :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff x \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

  où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

3.2 Éléments propres et matrices semblables

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$$

- Les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de B sont liés par la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff B\big(P^{-1}X\big) = \lambda\big(P^{-1}X\big) \\ &\iff P^{-1}X \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

  $X \mapsto P^{-1}X$ est un isomorphisme de $E_\lambda(A) \to E_\lambda(B)$.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique de** A.

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Proposition. Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de sont polynôme caractéristique χ_A.

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.

4.2 Multiplicité, propriétés

Définition. On dit que λ est valeur propre de A **de multiplicité** m lorsque λ est racine de multiplicité m de χ_A.

Proposition. Un matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Proposition. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comptées avec multiplicité, est n.

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \varnothing$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, avec même multiplicité.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Remarque. *A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres. On peut cependant montrer que, pour λ valeur propre, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^\top)$ ont la même dimension.*

4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** u le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u dans une base.

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors χ_{u_F} divise χ_u.

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ, alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

5 Diagonalisabilité

5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit diagonale.
Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des sous-espaces propres de u :

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = n \end{aligned}$$

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si

- χ_u est scindé
- chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée

Remarque. *Ça signifie que l'on peut écrire :*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts}$$

et

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big) = m_i$$

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espace propres sont des droites vectorielles.

Remarque. *C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.*

5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PDP^{-1}$$

Remarque. *Les coefficients de D sont les valeurs propres de A, avec multiplicité.*

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent matriciellement :

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n \\ &\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\big(E_\lambda(A)\big) = m(\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \implies A \text{ diagonalisable}$$

Enfin, si $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff u \text{ diagonalisable}$$

Remarque. *Diagonaliser A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Sauf si c'est demandé, on ne calcule pas P^{-1}.*

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^\top \text{ diagonalisable}$$

5.3 Le théorème spectral

On démontrera et on complètera plus tard le résultat suivant :

Proposition. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

5.4 Des exemples

Exemple. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice pleine de 1.

Exemple. Diagonaliser $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, B$ et une base de $\mathrm{Im}\, B$. Puis montrer que B est diagonalisable.

6 Annexes

6.1 Annexe : une démonstration élégante de somme directe.

Théorème.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires deux à deux distincts, et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors la somme des $F_k = \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E)$ est directe :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E)$$

Preuve. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0$.
En appliquant à cette égalité u, puis u^2, ..., puis u^{p-1}, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0 & (L_0) \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 & (L_1) \\ \vdots & \\ \lambda_1^{p-1} x_1 + \lambda_2^{p-1} x_2 + \cdots + \lambda_p^{p-1} x_p = 0 & (L_{p-1}) \end{cases}$$

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. En effectuant $a_0(L_0) + a_1(L_1) + \cdots + a_{p-1}(L_{p-1})$, on obtient :

$$P(\lambda_1)x_1 + P(\lambda_2)x_2 + \cdots + P(\lambda_p)x_p = 0$$

Cette égalité est vraie pour tout polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$, donc en particulier pour les polynômes d'interpolation de Lagrange L_k associés à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, qui satisfont :

$$\begin{cases} L_k(\lambda_k) = 1 \\ L_k(\lambda_i) = 0 \text{ pour } i \neq k \end{cases}$$

ce qui fournit $x_k = 0$ pour tout k.
On a montré que les $\operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E)$ sont en somme directe. □

Exercices et résultats classiques à connaître

La matrice pleine de 1

240.1

Déterminer les éléments propres de :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Autour de la matrice compagnon

240.2

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est le polynôme caractéristique de C.

(b) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Un endomorphisme matriciel

240.3

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $AM - MA$.

(b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$

Un exemple d'équation matricielle

240.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E) \;:\; X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation (E).

Diagonalisation simultanée

240.5

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

Réduction d'une matrice circulante

240.6

On considère, pour $n \geqslant 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

Exercices du CCINP

240.7 **59.13**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif

   (b) en utilisant une matrice de f.

3. f est-il diagonalisable ?

240.8 **67**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

240.9 **68.111**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de ~~quatre~~ deux manières :

   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

   (c) en utilisant le rang de la matrice,

240.10 **69**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

240.11 **70.1**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

240.12 **72**

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

240.13 **73**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

240.14 **74**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ où x, y, z désignent trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

240.15 **83**

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

240.16 **91.12**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

240.17 **101.2**

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

Exercices

240.18

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

(c) Quelle est la limite de $(A^n)_n$?

240.19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres réelles de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

(b) Déterminer les valeurs propres complexes de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

240.20

Soit a, b réels,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que A est diagonalisable, et préciser une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(b) Exprimer $P^{-1}M(a,b)P$ en fonction de a et b.

(c) En déduire le déterminant et le spectre de $M(a,b)$.

240.21

Déterminer les éléments propres de :

(a) $D\ :\ f \mapsto f'$ sur $E = \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

(b) $\Delta\ :\ (u_n)_n \mapsto (u_{n+1}-u_n)_n$ sur E ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

240.22

Déterminer les éléments propres de :

$$\tau\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$$

240.23

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels $\geqslant 0$, et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

(a) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

(b) Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

240.24

Déterminer les réels x, y tq $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ soit vecteur propre de $\begin{pmatrix}x&1&1\\1&y&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

240.25

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$$

240.26

Déterminer les éléments propres de :

$$A = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

240.27

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\varphi(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit P un vecteur propre de φ. Déterminer le degré de P.

(c) Écrire la matrice M de l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_2[X]$, dans la base $(1,(X-1),(X-1)^2)$.

(d) Déterminer les éléments propres de φ.

240.28

Soit $n \geqslant 3$, $a \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Quel est le rang de M ? Préciser $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$.

(b) Donner les valeurs propres de M.

(c) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Petits problèmes d'entrainement

240.29 ✍

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$u \circ v - v \circ u = u$$

(a) Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$$

(c) Montrer que $\phi : f \mapsto f \circ v - v \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(d) En déduire, en utilisant la dimension de $\mathcal{L}(E)$, que u est nilpotent.

240.30 ✍

On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, et $x \geqslant 0$, on pose :

$$T_f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $T : f \mapsto T_f$ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer les éléments propres de T.

240.31

(a) Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.

(b) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer, sans calculer de polynôme caractéristique, qu'il existe λ réel tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

240.32

Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) Montrer que tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

(b) Montrer que tout vecteur propre de u est dans $\operatorname{Im} u$ ou dans $\operatorname{Ker} u$.

(c) Montrer que, pour que u soit diagonalisable, il est nécessaire que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

(d) Montrer qu'avec $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : P \mapsto P - P'$, on a $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$ mais u n'est pas diagonalisable.

240.33

(a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)}\right) y$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

240.34

Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.

(a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

(b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

(c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.