Polynômes d'endomorphisme, polynômes de matrice

Je me souviens

1. Que signifie $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
2. Citer trois exemples d'algèbres.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k entier, que désigne A^k ? A^0 ?
4. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et k entier, que désigne u^k ? u^0 ?
5. Qu'est-ce qu'un idéal de $\mathbb{K}[X]$?

1 Polynôme d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de l'endomorphisme** u :

$$P(u) = p_d u^d + \cdots + p_1 u + p_0 \mathrm{Id}_E$$

C'est un endomorphisme de E.
On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u.
On dit qu'un endomorphisme v est un **polynôme de l'endomorphisme** u lorsque $v \in \mathbb{K}[u]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Remarque. *u^k désigne $\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.*
$P(u)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en u.

Exemple. Avec $P = X^3 - 2X + 1$, $P(u) = u^3 - 2u + \mathrm{Id}_E$, et donc $P(u)(x) = u^3(x) - 2u(x) + x$.

Définition. On dit que P est **annulateur de** u lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$\begin{array}{rccc} \phi_u : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

- ϕ_u est un morphisme d'algèbres
- $\mathrm{Im}\, \phi_u = \mathbb{K}[u]$
- $\mathrm{Ker}\, \phi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Exemple. Comme $P = X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$, par le morphisme ϕ_u, on déduit $u^3 - 2u + \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E) \circ (u^2 + u - \mathrm{Id}_E)$.

Proposition.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[u] &= \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((u^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \end{aligned}$$

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{l} (\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u) \\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) \text{ et } Q(u) \text{ commutent} \\ 1(u) = \mathrm{Id}_E \end{array}$$

1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} \phi_u : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

n'est pas injectif. $\mathrm{Ker}\,\phi_u$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de** u. Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u et appelé **polynôme minimal de** u, tel que :

$$\mathrm{Ker}\,\phi_u = (\pi_u) = \{\pi_u\, Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque. *On peut aussi trouver la notation μ_u pour le polynôme minimal de u.*

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie :

$$Q(u) = 0 \iff \pi_u \mid Q$$

π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u.

Remarque. *Si E n'est pas de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u peut avoir un polynôme minimal, ou pas.*

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie $\lambda \mathrm{Id}_E$.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, i.e. un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie, i.e. un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Exemple. On considère $D\ :\ P \mapsto P'$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que D n'admet pas de polynôme minimal.

1.4 Base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal π_u, et on note $d = \deg(\pi_u)$. Alors $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Remarque.

- *Dans le cas du théorème,* $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
- $\phi_u\ :\ P \mapsto P(u)$ *induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels* $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ *et* $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$.
- *Si u n'admet pas de polynôme minimal, c'est-à-dire lorsque ϕ_u est injective, ϕ_u est un isomorphisme d'algèbres entre* $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ *et* $(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$.

2 Polynôme d'une matrice

2.1 Définition

Définition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de la matrice** A :

$$P(A) = p_d A^d + \cdots + p_1 A + p_0 I_n$$

C'est une matrice carrée.
On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes de la matrice A.
On dit qu'une matrice B est un **polynôme de la matrice** A lorsque $B \in \mathbb{K}[A]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Remarque. *A^k désigne $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.*
$P(A)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en A.

2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\begin{array}{rccl} \phi_A\ :\ & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

- ϕ_A est un morphisme d'algèbres
- $\operatorname{Im} \phi_A = \mathbb{K}[A]$
- $\operatorname{Ker} \phi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Proposition.

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[A] &= \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((A^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

$\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}&(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) \\ &(PQ)(A) = P(A) \circ Q(A) \\ &P(A) \text{ et } Q(A) \text{ commutent} \\ &1(A) = I_n\end{aligned}$$

Si A est triangulaire, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont connus :

$$\text{Lorsque } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, alors P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} \phi_A : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

n'est pas injectif. $\operatorname{Ker} \phi_A$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de** A. Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_A et appelé **polynôme minimal de** A, tel que :

$$\operatorname{Ker} \phi_A = (\pi_A) = \{\pi_A Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque. *On peut aussi trouver la notation μ_A pour le polynôme minimal de A.*

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Q(u) = 0 \iff \pi_A \mid Q$$

π_A est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme mininmal, et on note $d = \deg(\pi_A)$. Alors $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Remarque.

- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$.
- $\phi_A \ : \ P \mapsto P(A)$ *induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels* $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ *et* $(\mathbb{K}[A], +, \cdot)$.

3 Lien entre les deux notions

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \mathrm{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P\big(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})\big)$$

4 Annexes

4.1 Annexe : polynôme d'un élément d'un algèbre

On peut généraliser la construction proposée de $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$.

Définition. Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, et e son neutre. Pour $P = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathcal{A}$, on définit :

$$P(a) = p_d a^d + \cdots + p_1 a + p_0 e$$

appelé **polynôme de** a. C'est un élément de $\mathcal{A}$.

Définition. Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, et $a \in \mathcal{A}$. On note :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[a] &= \{P(a),\ P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((a^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \end{aligned}$$

Proposition. $\mathbb{K}[a]$ est la plus petite sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ contenant a, c'est-à-dire la sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ engendrée par a. Elle est commutative.

Proposition. Soit $a \in \mathcal{A}$. On note :

$$\begin{array}{rccc} \phi_a \ : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{A} \\ & P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

- ϕ_a est un morphisme d'algèbres
- $\mathrm{Im}\, \phi_a = \mathbb{K}[a]$
- $\mathrm{Ker}\, \phi_a$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Exercices et résultats classiques à connaître

Polynôme d'une matrice diagonale

25.1

Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
Calculer $P(D)$.

Valeur propre de $P(u)$

25.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Exercices du CCINP

25.3 CCINP 65.12

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u)\circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X],\ P(u)\circ Q(u) = Q(u)\circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$: (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

25.4 CCINP 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

25.5 CCINP 91.34

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On donne le polynôme caractéristique : $\chi_A = (X-1)^3$.

3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercices

25.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent de E admet une unique valeur propre, que l'on précisera.

25.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Montrer que $P(A^\top) = P(A)^\top$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, est-que $P^k(A) = P(A^k)$? $P^k(A) = P(A)^k$?

25.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $\pi_M(0) \neq 0$.

25.9

(a) Déterminer, pour chacune des matrices matrices suivantes, le polynôme minimal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Exploiter ces polynômes minimaux pour exprimer A^n, B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Petits problèmes d'entrainement

25.10 ✍

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est libre. Montrer que les polynômes en u sont les seuls endomorphismes qui commutent avec u.

25.11

Soit $a \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$u(M) = aM + \mathrm{tr}(M) I_n$$

(a) Déterminer les éléments propres de u.

(b) En déduire le polynôme minimal de u.

25.12

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P annulateur de u, dont 0 est racine simple. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

25.13

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier que le polynôme :

$$X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$$

est annulateur de A. Qu'en déduire quant au degré de π_A ?

(b) Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\deg(\pi_A) \neq 2$? En déduire une expression du polynôme minimal pour toute matrice 2×2.

(c) Déterminer π_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.