

Polynômes d'endomorphisme, polynômes de matrice

Je me souviens	2
Cours	3
1 Polynôme d'un endomorphisme	3
1.1 Définition	3
1.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$	3
1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie	3
1.4 Base de $\mathbb{K}[u]$	4
2 Polynôme d'une matrice	4
2.1 Définition	4
2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$	4
2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée	5
2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$	6
3 Lien entre les deux notions	6
4 Annexes	6
4.1 Annexe : polynôme d'un élément d'un algèbre	6
Exercices	6
Exercices et résultats classiques à connaître	6
Polynôme d'une matrice diagonale	6
Valeur propre de $P(u)$	6
Exercices du CCINP	7
Exercices	7
Petits problèmes d'entraînement	7

Je me souviens

1. Que signifie $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
2. Citer trois exemples d'algèbres.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k entier, que désigne A^k ? A^0 ?
4. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et k entier, que désigne u^k ? u^0 ?
5. Qu'est-ce qu'un idéal de $\mathbb{K}[X]$?

1 Polynôme d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de l'endomorphisme** u :

$$P(u) = p_d u^d + \dots + p_1 u + p_0 \text{Id}_E$$

C'est un endomorphisme de E .

On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u .

On dit qu'un endomorphisme v est un **polynôme de l'endomorphisme** u lorsque $v \in \mathbb{K}[u]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Remarque. u^k désigne $\underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

$P(u)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en u .

Exemple. Avec $P = X^3 - 2X + 1$, $P(u) = u^3 - 2u + \text{Id}_E$, et donc $P(u)(x) = u^3(x) - 2u(x) + x$.

Définition. On dit que P est **annulateur de** u lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$\begin{aligned} \phi_u : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

- ϕ_u est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_u = \mathbb{K}[u]$
- $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Exemple. Comme $P = X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$, par le morphisme ϕ_u , on déduit $u^3 - 2u + \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E) \circ (u^2 + u - \text{Id}_E)$.

Proposition.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[u] &= \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((u^n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q)(u) &= \lambda P(u) + \mu Q(u) \\ (PQ)(u) &= P(u) \circ Q(u) \\ P(u) \text{ et } Q(u) &\text{ commutent} \\ 1(u) &= \text{Id}_E \end{aligned}$$

1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le morphisme :

$$\begin{aligned} \phi_u : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de u** . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u et appelé **polynôme minimal de u** , tel que :

$$\text{Ker } \phi_u = (\pi_u) = \{\pi_u Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_u pour le polynôme minimal de u .

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie :

$$Q(u) = 0 \iff \pi_u \mid Q$$

π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u .

Remarque. Si E n'est pas de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u peut avoir un polynôme minimal, ou pas.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie λId_E .

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, i.e. un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie, i.e. un endomorphisme s tel que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Exemple. On considère $D : P \mapsto P'$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que D n'admet pas de polynôme minimal.

1.4 Base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal π_u , et on note $d = \deg(\pi_u)$. Alors $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Remarque.

- Dans le cas du théorème, $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
- $\phi_u : P \mapsto P(u)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$.
- Si u n'admet pas de polynôme minimal, c'est-à-dire lorsque ϕ_u est injective, ϕ_u est un isomorphisme d'algèbres entre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$.

2 Polynôme d'une matrice

2.1 Définition

Définition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de la matrice A** :

$$P(A) = p_d A^d + \dots + p_1 A + p_0 I_n$$

C'est une matrice carrée.

On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes de la matrice A .

On dit qu'une matrice B est un **polynôme de la matrice A** lorsque $B \in \mathbb{K}[A]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Remarque. A^k désigne $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.

$P(A)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en A .

2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

- ϕ_A est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_A = \mathbb{K}[A]$
- $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Proposition.

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[A] &= \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((A^n)_{n \in \mathbb{N}})\end{aligned}$$

$\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)(A) &= \lambda P(A) + \mu Q(A) \\ (PQ)(A) &= P(A)Q(A) \\ P(A) \text{ et } Q(A) &\text{ commutent} \\ 1(A) &= I_n\end{aligned}$$

Si A est triangulaire, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont connus :

$$\text{Lorsque } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le morphisme :

$$\begin{aligned}\phi_A : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto P(A)\end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de A** . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_A et appelé **polynôme minimal de A** , tel que :

$$\text{Ker } \phi_A = (\pi_A) = \{\pi_A Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_A pour le polynôme minimal de A .

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Q(A) = 0 \iff \pi_A \mid Q$$

π_A est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A .

Exemple. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal, et on note $d = \deg(\pi_A)$. Alors $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Remarque.

- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$.
- $\phi_A : P \mapsto P(A)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[A], +, \cdot)$.

3 Lien entre les deux notions

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \text{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P(\text{Mat}(u, \mathcal{B}))$$

4 Annexes

4.1 Annexe : polynôme d'un élément d'un algèbre

On peut généraliser la construction proposée de $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$.

Définition. Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre, et e son neutre. Pour $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathcal{A}$, on définit :

$$P(a) = p_d a^d + \dots + p_1 a + p_0 e$$

appelé **polynôme de a** . C'est un élément de $\mathcal{A}$.

Définition. Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre, et $a \in \mathcal{A}$. On note :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[a] &= \{P(a), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Proposition. $\mathbb{K}[a]$ est la plus petite sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ contenant a , c'est-à-dire la sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ engendrée par a . Elle est commutative.

Proposition. Soit $a \in \mathcal{A}$. On note :

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{A} \\ P &\mapsto P(a) \end{aligned}$$

- ϕ_a est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_a = \mathbb{K}[a]$
- $\text{Ker } \phi_a$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Exercices et résultats classiques à connaître

Polynôme d'une matrice diagonale

250.1

Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Calculer $P(D)$.

Valeur propre de $P(u)$

250.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Exercices du CCINP

250.3
 **65.12**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
- (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
(b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$

250.4
 **70**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Dédurre de la question 1. les éléments propres de B .

250.5
 **91.34**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On donne le polynôme caractéristique : $\chi_A = (X - 1)^3$.

- Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

Exercices

250.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent de E admet une unique valeur propre, que l'on précisera.

250.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Montrer que $P(A^\top) = P(A)^\top$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, est-ce que $P^k(A) = P(A^k)$? $P^k(A) = P(A)^k$?

250.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $\pi_M(0) \neq 0$.

250.9

- Déterminer, pour chacune des matrices suivantes, le polynôme minimal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Exploiter ces polynômes minimaux pour exprimer A^n , B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Petits problèmes d'entraînement

250.10 

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre. Montrer que les polynômes en u sont les seuls endomorphismes qui commutent avec u .

250.11

Soit $a \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$u(M) = aM + \text{tr}(M)I_n$$

- (a) Déterminer les éléments propres de u .
- (b) En déduire le polynôme minimal de u .

250.12

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P annulateur de u , dont 0 est racine simple. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

250.13

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier que le polynôme :

$$X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$$

est annulateur de A . Qu'en déduire quant au degré de π_A ?

- (b) Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\deg(\pi_A) \neq 2$? En déduire une expression du polynôme minimal pour toute matrice 2×2 .

- (c) Déterminer π_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

250.14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose u diagonalisable. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note p_λ la projection sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} E_\mu(u)$. Montrer que $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$.

250.15

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q premiers entre eux, tels que $PQ(u) = 0$.

- (a) On suppose E de dimension finie. Montrer que :

$$\text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Im}(P(u)) = E$$

- (b) On ne suppose plus E de dimension finie. Le résultat précédent est-il encore vrai ?

250.16

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes p et q , ainsi que deux réels λ, μ tels que :

$$\begin{cases} u &= \lambda p + \mu q \\ u^2 &= \lambda^2 p + \mu^2 q \\ u^3 &= \lambda^3 p + \mu^3 q \end{cases}$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n en fonction de λ, μ, p, q .

250.17

Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une matrice réelle ont les mêmes facteurs irréductibles.

250.18

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la multiplicité de $\lambda \in \mathbb{K}$ en tant que racine du polynôme minimal π_u est le plus petit entier p vérifiant :

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^p = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{p+1}$$

250.19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $u : M \mapsto AM$. Montrer que $\pi_A = \pi_u$.