

## Réduction des endomorphismes et des matrices

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
<b>Cours</b>	<b>3</b>
1 Polynômes annulateurs et valeurs propres . . . . .	3
1.1 Cas des endomorphismes . . . . .	3
1.2 Cas des matrices . . . . .	3
2 Lemme de décomposition des noyaux . . . . .	3
2.1 Le théorème . . . . .	3
2.2 Exemple d'utilisation . . . . .	4
3 Polynômes annulateurs et réduction . . . . .	4
3.1 Une CNS de diagonalisabilité . . . . .	4
3.2 Sous-espaces stables . . . . .	5
3.3 Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	5
3.4 Traduction matricielle des résultats précédents . . . . .	5
4 Trigonalisabilité . . . . .	5
4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie . . . . .	5
4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée . . . . .	6
5 Nilpotence . . . . .	6
5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence . . . . .	6
5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent . . . . .	6
5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme . . . . .	7
5.4 Traduction matricielle des résultats précédents . . . . .	7
6 Sous-espaces caractéristiques . . . . .	7
6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme . . . . .	7
6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée . . . . .	8
7 Annexes . . . . .	9
7.1 Annexe : endomorphisme laissant stables les facteurs d'une somme directe . . . . .	9
7.2 Annexe : démonstration du théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	9
7.3 Annexe : démonstration de la caractérisation de la trigonalisabilité . . . . .	10
7.4 Complément : décomposition de Dunford . . . . .	10
7.5 Complément : projecteurs spectraux . . . . .	11
<b>Exercices</b>	<b>11</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	11
Obtenir un polynôme annulateur . . . . .	11
Réduction d'une matrice de rang 2 . . . . .	12
Utiliser le lemme des noyaux . . . . .	12
Utiliser une équation différentielle . . . . .	12
Exercices du CCINP . . . . .	13
Exercices . . . . .	14
Pratique de la réduction . . . . .	14
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	15

**Je me souviens**

1. Que signifie : «  $F$  est stable par  $u$  » ?
2. Que peut-on définir lorsque  $F$  est stable par  $u$  ? Comment cela se traduit matriciellement ?

## 1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

### 1.1 Cas des endomorphismes

**Proposition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $x \in E$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

**Remarque.** Rappelons que  $P(u)$  désigne un endomorphisme, que l'on évalue en  $x$ . Ça n'aurait aucun sens de chercher à évaluer en  $P$  le vecteur  $u(x)$ .

**Proposition.** Si  $P$  est annulateur de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

**Proposition.** Si  $E$  est de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors les valeurs propres de  $u$  sont les racines du polynôme minimal  $\pi_u$ .

**Corollaire.** Si  $E$  est de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors les polynôme caractéristique  $\chi_u$  et le polynôme minimal  $\pi_u$  ont les mêmes racines.

**Remarque.** En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si  $P$  est annulateur de  $u$ , les valeurs propres sont parmi les racines de  $P$

**Exemple.** On considère un projecteur  $p$  d'un espace vectoriel de dimension finie. Calculer son polynôme caractéristique  $\chi_p$ , son polynôme minimal  $\pi_p$  et donner un autre polynôme, annulateur de  $p$ .

### 1.2 Cas des matrices

**Proposition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $AX = \lambda A$ , alors  $P(A)X = P(\lambda)X$ .

**Proposition.** Si  $P$  est annulateur de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors toute valeur propre de  $A$  est racine de  $P$ .

**Proposition.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme minimal  $\pi_A$ .

**Corollaire.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors les polynôme caractéristique  $\chi_A$  et le polynôme minimal  $\pi_A$  ont les mêmes racines.

**Remarque.** En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si  $P$  est annulateur de  $A$ , les valeurs propres sont parmi les racines de  $P$

**Exemple.** On considère la matrice  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  remplie de 1. Calculer son polynôme caractéristique  $\chi_J$ , son polynôme minimal  $\pi_J$  et donner un autre polynôme, annulateur de  $J$ .

**Exemple.** Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Lemme de décomposition des noyaux

### 2.1 Le théorème

**Lemme de décomposition des noyaux.**

Soit  $P_1, P_2$  deux polynômes, que l'on suppose premiers entre eux ( $P_1 \wedge P_2 = 1$ ). On note  $P = P_1 P_2$ . Alors, pour tout endomorphisme  $u$  :

$$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$$

**Remarque.** On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en  $u$ .

**Corollaire.** Soit  $P_1, \dots, P_r$  des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note  $P = P_1 \dots P_r$ . Alors, pour tout endomorphisme  $u$  :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$$

**Corollaire.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme annulateur non nul de  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note :

$$P = \lambda P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{K}$ . Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i^{m_i}(u))$$

## 2.2 Exemple d'utilisation

**Exemple.** On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \quad (E)$$

où  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue.

1. Montrer que si  $\phi$  est solution de (E), alors  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On considère  $u : f \mapsto f'$  endomorphisme de  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Écrire l'ensemble  $S$  des solutions de (E) comme  $\text{Ker}(P(u))$ , où  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme que l'on précisera.
3. Décomposer  $P$  en produit de facteurs irréductibles.
4. En déduire la résolution de  $E$  par la résolution de deux équations différentielles d'ordre  $< 3$ .

## 3 Polynômes annulateurs et réduction

### 3.1 Une CNS de diagonalisabilité

**Théorème.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé à racines simples} \end{aligned}$$

**Proposition.** On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

**Exemple.** Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

### 3.2 Sous-espaces stables

**Proposition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose que  $F$  est stable par  $u$ , et on note  $u_F$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ . Alors :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad \text{et} \quad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

**Proposition.** Avec les notations précédentes, si  $u$  est diagonalisable, alors  $u_F$  est diagonalisable.

### 3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème de Cayley-Hamilton.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\chi_u$  est annulateur de  $u$ .

**Corollaire.** Si  $E$  est de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  :

- $\pi_u \mid \chi_u$
- $\deg(\pi_u) \leq n$

### 3.4 Traduction matricielle des résultats précédents

**Théorème.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \end{aligned}$$

**Exemple.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^q = I_n$  pour un  $q \in \mathbb{N}^*$ . Justifier que  $A$  est diagonalisable.

**Théorème de Cayley-Hamilton.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_A$  est annulateur de  $A$ .

**Corollaire.**

- $\pi_A \mid \chi_A$
- $\deg(\pi_A) \leq n$

## 4 Trigonalisabilité

### 4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

**Définition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$  soit triangulaire supérieure.

**Théorème.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

**Proposition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  est trigonalisable, i.e. si  $\chi_u$  est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

## 4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

**Définition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure, } \exists P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}), A = PTP^{-1}$$

s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B})$  soit triangulaire supérieure.

**Théorème.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

**Proposition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  est trigonalisable, i.e. si  $\chi_A$  est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

## 5 Nilpotence

### 5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence

**Définition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est **nilpotent** lorsqu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$u^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier  $k$  satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de nilpotence** de  $u$ .

**Remarque.** Ainsi, si  $u$  est nilpotent d'indice  $m$ , on a :

$$u^m = 0 \quad \text{et} \quad u^{m-1} \neq 0$$

### 5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

**Proposition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

- $u$  est nilpotent  $\iff \chi_u = X^n$
- $u$  est nilpotent d'indice  $m$   $\iff \pi_u = X^m$

**Corollaire.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $m$ . Alors :

$$m \leq n$$

### 5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme

#### Théorème.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

### 5.4 Traduction matricielle des résultats précédents

**Définition.** On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **nilpotente** lorsqu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$A^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier  $k$  satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de nilpotence** de  $A$ .

**Remarque.** Ainsi, si  $A$  est nilpotent d'indice  $m$ , on a :

$$A^m = 0 \quad \text{et} \quad A^{m-1} \neq 0$$

**Proposition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

- $A$  est nilpotent  $\iff \chi_A = X^n$
- $A$  est nilpotent d'indice  $m \iff \pi_A = X^m$

**Corollaire.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente d'indice  $m$ . Alors :

$$m \leq n$$

#### Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

**Corollaire.**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente si et seulement si  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .

**Exemple.** La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour unique valeur propre réelle 0, et pourtant n'est pas nilpotente.

**Remarque.** Une matrice nilpotente n'est pas toujours triangulaire. Par exemple,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  est nilpotente.

## 6 Sous-espaces caractéristiques

### 6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

**Définition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , de multiplicité  $m_\lambda$ , on appelle **sous-espace caractéristique de  $u$  associé à  $\lambda$**  l'espace :

$$N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$$

**Proposition.** Avec les notations de la définition :

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$
- $N_\lambda(u)$  est stable par  $u$
- $N_\lambda(u)$  est de dimension  $m_\lambda$
- En notant  $u_\lambda$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $N_\lambda(u)$ , on a  $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{m_\lambda}$ .

#### Théorème.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $\chi_u$  scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres  $\lambda_i$  sont deux à deux distinctes, et les multiplicités  $m_i$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ , il existe une base de  $E$  dans laquelle  $u$  est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices  $R_i$  sont nilpotentes.

## 6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée

**Définition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , de multiplicité  $m_\lambda$ , on appelle **sous-espace caractéristique de  $A$  associé à  $\lambda$**  l'espace :

$$N_\lambda(A) = \text{Ker}((A - \lambda I_n)^{m_\lambda})$$

**Proposition.** Avec les notations de la définition :

- $E_\lambda(A) \subset N_\lambda(A)$
- $N_\lambda(A)$  est de dimension  $m_\lambda$

**Théorème.**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\chi_A$  scindé. Alors :

$$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} N_\lambda(A)$$

De plus, en notant :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres  $\lambda_i$  sont deux à deux distinctes, et les multiplicités  $m_i$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ , la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices  $R_i$  sont triangulaires supérieures strictes.





### 7.3 Annexe : démonstration de la caractérisation de la trigonalisabilité

**Théorème.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \chi_u \text{ est scindé}$$

*Preuve.*

$\Rightarrow$  On suppose  $u$  trigonalisable. Dans une base de trigonalisation  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En notant  $A$  cette matrice, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

qui est bien scindé.

$\Leftarrow$  On raisonne par récurrence sur  $n$ , la dimension de  $E$ .

- Si  $E$  est de dimension 1, le résultat est évident.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque fixé. On suppose que le résultat est vrai dans un espace de dimension  $n$ . Soit alors  $E$  un espace de dimension  $n + 1$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont le polynôme caractéristique est scindé. On note  $\lambda$  l'une des racines de  $\chi_u$ , qui est une valeur propre de  $u$ , et  $e_1$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . On complète la famille

libre  $(e_1)$  en une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$  de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $u$  est donnée par blocs :

$$\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}_{\text{notée } A} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

Notons  $F = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ , de dimension  $n$ , et  $p$  le projecteur sur  $F$  de direction  $\text{Vect}(e_1)$ . Par les propriétés des calculs des déterminants pour les matrices triangulaires par blocs, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_C(X)$$

où  $C$  est la matrice de  $p \circ u_F \in \mathcal{L}(F)$ . Par hypothèse,  $\chi_u$  est scindé donc  $\chi_C$  l'est aussi, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $p \circ u_F$ . Il existe une base  $(e'_2, \dots, e'_{n+2})$  de  $F$  dans laquelle la matrice de  $p \circ u_F$  est triangulaire supérieure.

On note  $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ . Il reste simplement à vérifier que dans la base  $\mathcal{B}'$ , la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

Pour  $k \geq 2$  :

$$u(e'_k) = \alpha_k e_1 + p \circ u(e'_k)$$

en décomposant selon  $\text{Vect}(e_1) \oplus F$

$$= \alpha_k e_1 + \text{CL}(e'_2, \dots, e'_k)$$

car  $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$  est une base

de trigonalisation de  $p \circ u$

ce qui prouve que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}'$  est triangulaire supérieure.

• Par le principe du raisonnement par récurrence, le résultat est donc vrai dans tout espace de dimension finie.  $\square$

### 7.4 Complément : décomposition de Dunford

**Théorème.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $\chi_u$  scindé. Alors il existe deux endomorphismes  $d$  et  $n$ , respectivement diagonalisable et nilpotent, tels que :

$$u = d + n \quad \text{et} \quad dn = nd$$

Ces endomorphismes sont uniques.

*Preuve.*

• *Existence :*  
Par ce qui précède :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_{\lambda}(u)$$

Chaque  $N_{\lambda}$  est stable par  $u$ , et l'endomorphisme induit  $u_{N_{\lambda}}$  satisfait  $(u_{N_{\lambda}} - \lambda \text{Id}_E)^{m_{\lambda}} = 0$  par définition de l'espace caractéristique. En posant  $n_{\lambda} = u_{N_{\lambda}} - \lambda \text{Id}_{N_{\lambda}}$  qui est bien nilpotent et  $d_{\lambda} = \lambda \text{Id}_{N_{\lambda}}$  qui est diagonalisable, il suffit de définir  $n$  et  $d$  par leur restrictions aux  $N_{\lambda}$ .

• *Unicité :*

Soit  $(d', n')$  un autre couple solution.

L'endomorphisme  $d'$  commute avec  $n'$  donc avec  $u = d' + n'$ , et avec  $d$  qui est un polynôme en  $u$ . Comme  $d$  et  $d'$  sont diagonalisables et commutent, ils admettent une base commune de vecteurs propres (ils sont simultanément diagonalisables), et donc  $d - d'$  est en particulier diagonalisable.

D'autre part,  $n'$  commute avec  $u$  et donc avec  $n$  qui est un polynôme en  $u$ . On note  $\alpha$  et  $\alpha'$  les indices de nilpotence de  $n$  et  $n'$  respectivement. On a alors :

$$\begin{aligned} (d - d')^{\alpha + \alpha'} &= (n' - n)^{\alpha + \alpha'} \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha + \alpha'} (-1)^k \binom{\alpha + \alpha'}{k} n'^{\alpha + \alpha' - k} n^k \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} \dots \underbrace{n'^{\alpha + \alpha' - k}}_{=0} n^k + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha + \alpha'} \dots \underbrace{n^k}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $d - d'$  est diagonalisable et nilpotent, donc nul. Par suite,  $d = d'$ , puis  $n = n'$ .  $\square$

## 7.5 Complément : projecteurs spectraux

## Théorème.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $\chi_u$  scindé. Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , on appelle **projecteur spectral** et on note  $p_\lambda$  le projecteur sur  $N_\lambda(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} N_\mu(u)$ . Alors :

- chaque  $p_\lambda$  est un polynôme en  $u$
- pour toutes valeurs propres  $\lambda \neq \mu$  :

$$p_\lambda \circ p_\mu = 0$$

- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda = \text{Id}_E$

De plus, si  $u$  est diagonalisable, alors :

$$u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$$

Preuve. Non rédigée. □

## Exercices et résultats classiques à connaître

## Obtenir un polynôme annulateur

26.1

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$M^2 - M^\top = I_n$$

Montrer que  $M$  est diagonalisable.

## Réduction d'une matrice de rang 2

### 26.2

On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  suivante, où  $n \geq 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{-----} & 1 \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ 1 & \text{-----} & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) On souhaite dans cette question déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- a1. Quel est le rang de  $A$  ?
  - a2. Calculer  $A^2$ .
  - a3. Justifier que 0 est valeur propre d'ordre au moins  $n - 2$ .
  - a4. En notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux autres valeurs propres (éventuellement nulle, égales, complexes), donner  $\lambda_1 + \lambda_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2$ .
  - a5. En déduire  $\text{Sp}(A)$ .
- (b) Déterminer une CNS pour avoir  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{Z}$ .
- (c) Démontrer que, pour tout  $k \geq 3$ , il existe  $\lambda_k, \mu_k$  tels que :

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k A^2$$

## Utiliser le lemme des noyaux

### 26.3

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 = \text{Id}_E$ . Montrer que  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

## Utiliser une équation différentielle

### 26.4

- (a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

- (b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left( \frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

- (c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\varphi$ .

## Exercices du CCINP

**26.5**

 **62.21**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ .

2. Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  :
- (a) en utilisant le lemme des noyaux.

**26.6**

 **65.3**

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ , puis en déduire que le polynôme  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**26.7**

 **68.14**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières :
- (d) en calculant  $A^2$ .

**26.8**

 **75**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.
2. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $A$ .  
Trouver une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .  
On donnera explicitement les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

3. En déduire la résolution du système différentiel  $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

**26.9**

 **88**

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
Prouver que si  $P$  annule  $u$  alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $E$  définie par  $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par :  $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$ .
- (a) Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .
- (b)  $u$  est-il diagonalisable ?  
Justifier sa réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

**26.10**

 **93.23**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ .  
On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.  
(b) En déduire que  $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .
3. On suppose que  $u$  est non bijectif.  
Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Justifier la réponse.

## Exercices

### 26.11

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$  espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Montrer qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $u$  si et seulement s'il possède une base formée de vecteurs propres de  $u$ .

### 26.12

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1.

- (a) Montrer qu'il existe  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que  $A = XY^T$ , et que  $A^2 = \text{tr}(A)A$ .
- (b) En déduire que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

### 26.13

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^3 = I_3$  et  $A \neq I_3$ .

- (a) Déterminer les valeurs propres réelles de  $A$ .
- (b) Déterminer les valeurs propres complexes de  $A$ .

### 26.14

Soit  $u$  endomorphisme de  $E$   $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . On suppose que  $\text{Sp}(u) = \{1\}$ . Montrer que  $(u - \text{Id}_E)$  est nilpotent.

## Pratique de la réduction

### 26.15

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

et  $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$  canoniquement associé à  $M$ .

- (a) En procédant à un calcul par bloc, déterminer  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^p = I_5$ . En déduire que  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ .

- (b) Déterminer un vecteur  $x \in \mathbb{R}^5$  tel que la famille :

$$(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x))$$

forme une base de  $\mathbb{R}^5$ .

Quelle est la matrice de  $m$  dans cette base ?

### 26.16

On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? En donner les éléments propres.

### 26.17

Montrer que  $A$  est diagonalisable et déterminer les éléments propres de  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  où :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, i \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 26.18

Soit  $n \geq 2$  entier. On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $A = (a_{ij})_{i,j}$  où :

$$a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$$

- (a) Dans cette question seulement, on prend  $n = 3$ . Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- (b) Calculer  $A^2$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**26.19**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$


Donner une C.N.S. pour que  $A$  soit diagonalisable.

**26.20**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Soit  $B = I_3 - A$ . Trouver  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tel que  $(B^2X, BX, X)$  soit une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . En déduire une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire.


### Petits problèmes d'entraînement

**26.21** 

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B$  la matrice définie par blocs par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $B^2$ .
- Montrer que  $B$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible.
- Montrer que, si  $A$  est diagonalisable et inversible, alors  $B$  est diagonalisable.

**26.22** 

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . On considère  $a \in E$  et, pour  $x \in E$ , on pose :

$$u(x) = \varphi(a)x - \varphi(x)a$$

- Justifier rapidement que  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
- Expliciter  $u \circ u$ .
- Proposer une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $a$  et  $\varphi$ , pour que  $u$  soit diagonalisable.

**26.23**

Soit  $n \geq 2$ . On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$\varphi(M) = M - \text{tr}(M)I_n$$

- Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- Déterminer un polynôme annulateur de  $\varphi$ , et en déduire que  $\varphi$  est diagonalisable.
- Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ , sa trace et son déterminant.

**26.24**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que le rang de  $A$  est pair, et que  $\text{tr}(A)$  est un entier.

**26.25**

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que  $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ .
- Peut-on déduire de la question précédente que  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

**26.26**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $p$  un projecteur fixé de  $E$  et  $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par :

$$\phi(f) = \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$$

- (a)  $\phi$  est-elle linéaire ?  
 (b)  $\phi$  est-elle diagonalisable ?  
 (c) Quelle est la dimension des sous-espaces propres de  $\phi$  ?

**26.27**

Soit  $P$  une matrice de projection et  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par :

$$\phi(M) = PM + MP$$

Montrer que  $\phi$  est diagonalisable.

**26.28**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que :

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$$

**26.29**

Soit  $(u_n)_n$  une suite réelle vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

- (a) Écrire la relation de récurrence sous la forme  $X_{n+1} = AX_n$  où  $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .  
 (b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2, n$ .

**26.30**

On considère  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

On s'intéresse à l'équation suivante, d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$M^2 - M = A$$

- (b) Justifier que les solutions de cette équation sont diagonalisables, et déterminer les valeurs propres possibles pour celles-ci.  
 (c) Utiliser un polynôme annulateur pour résoudre l'équation.