

Réduction des endomorphismes et des matrices

Je me souviens	2
Cours	3
1 Polynômes annulateurs et valeurs propres	3
1.1 Cas des endomorphismes	3
1.2 Cas des matrices	3
2 Lemme de décomposition des noyaux	3
2.1 Le théorème	3
2.2 Exemple d'utilisation	4
3 Polynômes annulateurs et réduction	4
3.1 Une CNS de diagonalisabilité	4
3.2 Sous-espaces stables	5
3.3 Théorème de Cayley-Hamilton	5
3.4 Traduction matricielle des résultats précédents	5
4 Trigonalisabilité	5
4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie	5
4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée	6
5 Nilpotence	6
5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence	6
5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent	6
5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme	7
5.4 Traduction matricielle des résultats précédents	7
6 Sous-espaces caractéristiques	7
6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme	7
6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée	8
7 Annexes	9
7.1 Annexe : endomorphisme laissant stables les facteurs d'une somme directe	9
7.2 Annexe : démonstration du théorème de Cayley-Hamilton	9
7.3 Annexe : démonstration de la caractérisation de la trigonalisabilité	10
7.4 Complément : décomposition de Dunford	10
7.5 Complément : projecteurs spectraux	11
Exercices	11
Exercices et résultats classiques à connaître	11
Obtenir un polynôme annulateur	11
Réduction d'une matrice de rang 2	12
Utiliser le lemme des noyaux	12
Utiliser une équation différentielle	12
Exercices du CCINP	13
Exercices	14
Pratique de la réduction	14
Petits problèmes d'entraînement	15

Je me souviens

1. Que signifie : « F est stable par u » ?
2. Que peut-on définir lorsque F est stable par u ? Comment cela se traduit matriciellement ?

1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

1.1 Cas des endomorphismes

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Remarque. Rappelons que $P(u)$ désigne un endomorphisme, que l'on évalue en x . Ça n'aurait aucun sens de chercher à évaluer en P le vecteur $u(x)$.

Proposition. Si P est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de u est racine de P .

Proposition. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal π_u .

Corollaire. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les polynôme caractéristique χ_u et le polynôme minimal π_u ont les mêmes racines.

Remarque. En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si P est annulateur de u , les valeurs propres sont parmi les racines de P

Exemple. On considère un projecteur p d'un espace vectoriel de dimension finie. Calculer son polynôme caractéristique χ_p , son polynôme minimal π_p et donner un autre polynôme, annulateur de p .

1.2 Cas des matrices

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $AX = \lambda X$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Proposition. Si P est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P .

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les valeurs propres de A sont les racines du polynôme minimal π_A .

Corollaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal π_A ont les mêmes racines.

Remarque. En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si P est annulateur de A , les valeurs propres sont parmi les racines de P

Exemple. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ remplie de 1. Calculer son polynôme caractéristique χ_J , son polynôme minimal π_J et donner un autre polynôme, annulateur de J .

Exemple. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2 Lemme de décomposition des noyaux

2.1 Le théorème

Lemme de décomposition des noyaux.

Soit P_1, P_2 deux polynômes, que l'on suppose premiers entre eux ($P_1 \wedge P_2 = 1$). On note $P = P_1 P_2$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$$

Remarque. On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u .

Corollaire. Soit P_1, \dots, P_r des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note $P = P_1 \dots P_r$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$$

Corollaire. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$P = \lambda P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles sur \mathbb{K} . Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i^{m_i}(u))$$

2.2 Exemple d'utilisation

Exemple. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \quad (E)$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Montrer que si ϕ est solution de (E), alors ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. On considère $u : f \mapsto f'$ endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire l'ensemble S des solutions de (E) comme $\text{Ker}(P(u))$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme que l'on précisera.
3. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles.
4. En déduire la résolution de E par la résolution de deux équations différentielles d'ordre < 3 .

3 Polynômes annulateurs et réduction

3.1 Une CNS de diagonalisabilité

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé à racines simples} \end{aligned}$$

Proposition. On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

Exemple. Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

3.2 Sous-espaces stables

Proposition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est stable par u , et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Alors :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad \text{et} \quad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est annulateur de u .

Corollaire. Si E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- $\pi_u \mid \chi_u$
- $\deg(\pi_u) \leq n$

3.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \end{aligned}$$

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^q = I_n$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que A est diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est annulateur de A .

Corollaire.

- $\pi_A \mid \chi_A$
- $\deg(\pi_A) \leq n$

4 Trigonalisabilité

4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, i.e. si χ_u est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure, } \exists P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}), A = PTP^{-1}$$

s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, i.e. si χ_A est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

5 Nilpotence

5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de nilpotence** de u .

Remarque. Ainsi, si u est nilpotent d'indice m , on a :

$$u^m = 0 \quad \text{et} \quad u^{m-1} \neq 0$$

5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

Proposition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- u est nilpotent $\iff \chi_u = X^n$
- u est nilpotent d'indice m $\iff \pi_u = X^m$

Corollaire. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m . Alors :

$$m \leq n$$

5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

5.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$A^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de nilpotence** de A .

Remarque. Ainsi, si A est nilpotent d'indice m , on a :

$$A^m = 0 \quad \text{et} \quad A^{m-1} \neq 0$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A est nilpotent $\iff \chi_A = X^n$
- A est nilpotent d'indice $m \iff \pi_A = X^m$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice m . Alors :

$$m \leq n$$

Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

Corollaire. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre réelle 0, et pourtant n'est pas nilpotente.

Remarque. Une matrice nilpotente n'est pas toujours triangulaire. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

6 Sous-espaces caractéristiques

6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u , de multiplicité m_λ , on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$$

Proposition. Avec les notations de la définition :

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$
- $N_\lambda(u)$ est stable par u
- $N_\lambda(u)$ est de dimension m_λ
- En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, on a $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans \mathbb{N}^* , il existe une base de E dans laquelle u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont nilpotentes.

6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si λ est une valeur propre de A , de multiplicité m_λ , on appelle **sous-espace caractéristique de A associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(A) = \text{Ker}((A - \lambda I_n)^{m_\lambda})$$

Proposition. Avec les notations de la définition :

- $E_\lambda(A) \subset N_\lambda(A)$
- $N_\lambda(A)$ est de dimension m_λ

Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé. Alors :

$$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} N_\lambda(A)$$

De plus, en notant :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans \mathbb{N}^* , la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont triangulaires supérieures strictes.

7.3 Annexe : démonstration de la caractérisation de la trigonalisabilité

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

u est trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé

Preuve.

\Rightarrow On suppose u trigonalisable. Dans une base de trigonalisation \mathcal{B} , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En notant A cette matrice, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

qui est bien scindé.

\Leftarrow On raisonne par récurrence sur n , la dimension de E .

- Si E est de dimension 1, le résultat est évident.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose que le résultat est vrai dans un espace de dimension n . Soit alors E un espace de dimension $n + 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. On note λ l'une des racines de χ_u , qui est une valeur propre de u , et e_1 un vecteur propre associé à λ . On complète la famille

libre (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E , dans laquelle la matrice de u est donnée par blocs :

$$\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}_{\text{notée } A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

Notons $F = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$, de dimension n , et p le projecteur sur F de direction $\text{Vect}(e_1)$. Par les propriétés des calculs des déterminants pour les matrices triangulaires par blocs, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_C(X)$$

où C est la matrice de $p \circ u_F \in \mathcal{L}(F)$. Par hypothèse, χ_u est scindé donc χ_C l'est aussi, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $p \circ u_F$. Il existe une base (e'_2, \dots, e'_{n+2}) de F dans laquelle la matrice de $p \circ u_F$ est triangulaire supérieure.

On note $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$. Il reste simplement à vérifier que dans la base \mathcal{B}' , la matrice de u est triangulaire supérieure.

Pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} u(e'_k) &= \alpha_k e_1 + p \circ u(e'_k) \\ &\text{en décomposant selon } \text{Vect}(e_1) \oplus F \\ &= \alpha_k e_1 + \text{CL}(e'_2, \dots, e'_k) \\ &\text{car } (e'_2, \dots, e'_{n+1}) \text{ est une base} \\ &\text{de trigonalisation de } p \circ u \end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice de u dans \mathcal{B}' est triangulaire supérieure.

• Par le principe du raisonnement par récurrence, le résultat est donc vrai dans tout espace de dimension finie. □

7.4 Complément : décomposition de Dunford

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors il existe deux endomorphismes d et n , respectivement diagonalisable et nilpotent, tels que :

$u = d + n$ et $dn = nd$

Ces endomorphismes sont uniques.

Preuve.

- *Existence :*
Par ce qui précède :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_{\lambda}(u)$$

Chaque N_{λ} est stable par u , et l'endomorphisme induit $u_{N_{\lambda}}$ satisfait $(u_{N_{\lambda}} - \lambda \text{Id}_E)^{m_{\lambda}} = 0$ par définition de l'espace caractéristique. En posant $n_{\lambda} = u_{N_{\lambda}} - \lambda \text{Id}_{N_{\lambda}}$ qui est bien nilpotent et $d_{\lambda} = \lambda \text{Id}_{N_{\lambda}}$ qui est diagonalisable, il suffit de définir n et d par leur restrictions aux N_{λ} .

- *Unicité :*
Soit (d', n') un autre couple solution. L'endomorphisme d' commute avec n' donc avec $u = d' + n'$, et avec d qui est un polynôme en u . Comme d et d' sont diagonalisables et commutent, ils admettent une base commune de vecteurs propres (ils sont simultanément diagonalisables), et donc $d - d'$ est en particulier diagonalisable. D'autre part, n' commute avec u et donc avec n qui est un polynôme en u . On note α et α' les indices de nilpotence de n et n' respectivement. On a alors :

$$\begin{aligned} (d - d')^{\alpha + \alpha'} &= (n' - n)^{\alpha + \alpha'} \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha + \alpha'} (-1)^k \binom{\alpha + \alpha'}{k} n'^{\alpha + \alpha' - k} n^k \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} \dots \underbrace{n'^{\alpha + \alpha' - k}}_{=0} n^k + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha + \alpha'} \dots \underbrace{n^k}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $d - d'$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul. Par suite, $d = d'$, puis $n = n'$. □

7.5 Complément : projecteurs spectraux

Théorème.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Pour toute valeur propre λ de u , on appelle **projecteur spectral** et on note p_λ le projecteur sur $N_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} N_\mu(u)$. Alors :

- chaque p_λ est un polynôme en u
- pour toutes valeurs propres $\lambda \neq \mu$:

$$p_\lambda \circ p_\mu = 0$$

- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda = \text{Id}_E$

De plus, si u est diagonalisable, alors :

$$u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$$

Preuve. Non rédigée. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Obtenir un polynôme annulateur

26.1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^2 - M^\top = I_n$$

Montrer que M est diagonalisable.

Réduction d'une matrice de rang 2

26.2

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante, où $n \geq 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{-----} & 1 \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ 1 & \text{-----} & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) On souhaite dans cette question déterminer les valeurs propres de A .
- a1. Quel est le rang de A ?
 - a2. Calculer A^2 .
 - a3. Justifier que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 2$.
 - a4. En notant λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres (éventuellement nulle, égales, complexes), donner $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$.
 - a5. En déduire $\text{Sp}(A)$.
- (b) Déterminer une CNS pour avoir $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{Z}$.
- (c) Démontrer que, pour tout $k \geq 3$, il existe λ_k, μ_k tels que :

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k A^2$$

Utiliser le lemme des noyaux

26.3

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

Utiliser une équation différentielle

26.4

- (a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

- (b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

- (c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

Exercices du CCINP

26.5

 **62.21**

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

- Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - en utilisant le lemme des noyaux.

26.6

 **65.3**

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire le polynôme caractéristique de A , puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

26.7

 **68.14**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
 - en calculant A^2 .

26.8

 **75**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
- On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A .
Trouver une base (v_1, v_2) de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
On donnera explicitement les valeurs de a , b et c .

- En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

26.9

 **88**

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.
 - Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .
 - u est-il diagonalisable ?
Justifier sa réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

26.10

 **93.23**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E .

- Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
 - En déduire que $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
- On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Exercices

26.11

Soit u un endomorphisme diagonalisable de E espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement s'il possède une base formée de vecteurs propres de u .

26.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

- (a) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = XY^T$, et que $A^2 = \text{tr}(A)A$.
- (b) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

26.13

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

- (a) Déterminer les valeurs propres réelles de A .
- (b) Déterminer les valeurs propres complexes de A .

26.14

Soit u endomorphisme de E \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose que $\text{Sp}(u) = \{1\}$. Montrer que $(u - \text{Id}_E)$ est nilpotent.

Pratique de la réduction

26.15

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

et $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ canoniquement associé à M .

- (a) En procédant à un calcul par bloc, déterminer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_5$. En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

- (b) Déterminer un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que la famille :

$$(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x))$$

forme une base de \mathbb{R}^5 .

Quelle est la matrice de m dans cette base ?

26.16

On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? En donner les éléments propres.

26.17

Montrer que A est diagonalisable et déterminer les éléments propres de $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, i \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

26.18

Soit $n \geq 2$ entier. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$ où :

$$a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$$

- (a) Dans cette question seulement, on prend $n = 3$. Calculer le polynôme caractéristique de A .
- (b) Calculer A^2 . Montrer que A est diagonalisable.

26.19

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une C.N.S. pour que A soit diagonalisable.

26.20

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (b) Soit $B = I_3 - A$. Trouver $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que (B^2X, BX, X) soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

Petits problèmes d'entraînement

26.21 

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B la matrice définie par blocs par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer B^2 .
- (b) Montrer que B est inversible si et seulement si A est inversible.
- (c) Montrer que, si A est diagonalisable et inversible, alors B est diagonalisable.

26.22 

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E . On considère $a \in E$ et, pour $x \in E$, on pose :

$$u(x) = \varphi(a)x - \varphi(x)a$$

(a) Justifier rapidement que $u \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Expliciter $u \circ u$.

(c) Proposer une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et φ , pour que u soit diagonalisable.

26.23

Soit $n \geq 2$. On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\varphi(M) = M - \text{tr}(M)I_n$$

- (a) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (b) Déterminer un polynôme annulateur de φ , et en déduire que φ est diagonalisable.
- (c) Déterminer les éléments propres de φ , sa trace et son déterminant.

26.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que le rang de A est pair, et que $\text{tr}(A)$ est un entier.

26.25

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.
- (b) Peut-on déduire de la question précédente que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

26.26

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur fixé de E et $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\phi(f) = \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$$

- (a) ϕ est-elle linéaire ?
 (b) ϕ est-elle diagonalisable ?
 (c) Quelle est la dimension des sous-espaces propres de ϕ ?

26.27

Soit P une matrice de projection et ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\phi(M) = PM + MP$$

Montrer que ϕ est diagonalisable.

26.28

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$$

26.29

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

- (a) Écrire la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 (b) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1, u_2, n .

26.30

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer le polynôme minimal de A .

On s'intéresse à l'équation suivante, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M^2 - M = A$$

- (b) Justifier que les solutions de cette équation sont diagonalisables, et déterminer les valeurs propres possibles pour celles-ci.

- (c) Utiliser un polynôme annulateur pour résoudre l'équation.

26.31

Soit $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$ et $M \neq 0$.

- (a) Montrer que, pour tout polynôme P , $P(A)M = MP(B)$.
 (b) Montrer que A et B admettent au moins une valeur propre commune.

26.32

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de u , sans répétition, et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$\dim \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{\alpha_k} = \alpha_k$$

26.33

- (a) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$M^n = I_n \text{ et } \text{tr}(M) = n$$

- (b) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$M(M - I_n)^3 = 0 \text{ et } \text{tr}(M) = 0$$

26.34

- (a) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la matrice définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

26.35

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. On note M la matrice définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que M soit diagonalisable.

26.36

Soient n un entier naturel non nul et E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant au voisinage de 0

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

(b) Etablir que X^n divise alors le polynôme $P_n^2(X) - X - 1$.

(c) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = \text{Id}_E + f$$

(d) Soit maintenant f un endomorphisme de E ne possédant qu'une valeur propre λ , non nulle.

Montrer que $(f - \lambda \text{Id}_E)^n = 0$ et conclure qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = f$$

26.37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^5 + X + 1$. Résoudre l'équation $P(M) = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

26.38

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^2 + M^\top = I_n$$

(a) Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp } M$.

(b) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

26.39

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 \leq a_{ij} \leq 1 & \forall i, j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 & \forall i \end{cases}$$

(a) Montrer que 1 est valeur propre de A .

(b) Établir que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \exists i \text{ t.q. } |\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$$

En déduire que :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n BF(a_{ii}, 1 - a_{ii})$$

26.40

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on pose $T(u) = v$ où :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

Déterminer les éléments propres de T .

26.41

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et muni d'une base \mathcal{B} , $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E . On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel :

$$\{u \in E^* \text{ t.q. } u(H) = \{0\}\}$$

(b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si et seulement si, $u \circ f$ est colinéaire à u .

(c) Soient A et L les matrices dans \mathcal{B} de f et u . Montrer que H est stable par f si, et seulement si, L^\top est vecteur propre de A^\top .

(d) Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$