Espaces préhilbertiens réels

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
2. Qu'est-ce qu'une norme ? Lien entre produit scalaire et norme ?
3. Donner des exemples de produits scalaires et de normes.
4. Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?
5. Expression du produit scalaire dans une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$. Et la norme ?
6. Expression des coordonnées du vecteur x dans cette b.o.n. ?
7. Comment définit-on deux vecteurs orthogonaux ? Et l'orthogonal d'un sev ?
8. Méthodes pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre ?
9. Qu'est-ce que le théorème de Pythagore ?
10. Si a est un vecteur non nul, comment construire un vecteur unitaire colinéaire à a ?
11. Expression du projeté orthogonal du vecteur x sur la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$?
12. Soit F un sev dont on connaît une b.o.n. $(e_1, \dots, e_q)$; expression du projeté orthogonal de x sur F ?
13. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E, c'est-à-dire, en notant φ cette application :

- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. *La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.*

Notation. On note en général $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y.

Définition. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**. S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

1.2 Exemples de référence

Remarque. *Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.*

Définition. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y\rangle = X^\top Y$$

Remarque. *Il coïncide avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n-uplet.*
On trouve parfois la définition $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1. On accepte cependant souvent de confondre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

1.3 Autres exemples

Remarque. *Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.*

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Toujours sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire.

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I. On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. *On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.*

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. *Avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.*

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application :

$$\|\cdot\| \;:\; x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Proposition. C'est une norme.

Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.

Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y\rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.

Remarque. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.*

Définition. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormée est libre.

Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille orthogonale, alors $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

2.2 Sous-espaces orthogonaux

Définition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ x \perp y$$

On note $F \perp G$.

Proposition. Lorsque $F \perp G$, la somme $F + G$ est directe, et on la note $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Proposition. Si $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe et on la note $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{i=1}^{p}} F_i$.

2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie

Définition. Soit A une partie de E. On appelle **orthogonal de** A l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } \forall a \in A,\ x \perp a\}$$

Exemple. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition. Soit A une partie de E espace préhilbertien.

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
- $A \perp B$ signifie que $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$.

Remarque. *Pour la dernière propriété, penser à deux droites dans l'espace usuel de dimension* 3.

2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est orthogonal à F :

$$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

mais, en général, $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \subsetneq E$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, et F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Déterminer $F^\perp$.

Remarque. *On verra au § 4 que, lorsque F est de dimension finie (en particulier dans un espace euclidien), $F^\perp$ et F sont supplémentaires.*

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Définition. On appelle **base orthonormée** de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Proposition. Toute famille orthonormée de n vecteurs, lorsque $n = \dim E$, est une base orthonormée.

Théorème.

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Remarque. *On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.*

Exemple. Avec le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la famille :

$$\left((E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji})\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}-E_{ji})\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$$

est une base orthonormée.

3.2 Construction de bases orthonormées

Voir l'algorithme de Gram-Schmidt au § 4.4.

3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et x un vecteur de E. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $\begin{pmatrix} \langle e_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x\rangle \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

Remarque. *Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs.*
Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\langle x, y\rangle = X^\top Y \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{X^\top X} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque. *On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout i, j :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

4.1 Théorème de la base orthonormée incomplète

Théorème de la base orthonormée incomplète.

> Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée de E euclidien de dimension n, on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle **projection orthogonale sur** F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. *Rappelons que, par définition, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y tel que :*

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

Ceci fournit une méthode de détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de F.

Remarque. *On a supposé F de dimension finie, mais si F est de dimension infinie et que $F \oplus F^\perp = E$, alors la projection orthogonale est bien définie.*

Proposition. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. *Ceci fournit une seconde méthode de détermination de $p_F(x)$, lorsque l'on connaît une base orthonormée de F.*

Exemple. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$, et celle sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $t \mapsto t^2$ sur $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$.

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** la quantité :

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème.

Si F est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance précédente :
C'est l'unique $y_0 \in F$ tel que :

$$\|x - y_0\| = \operatorname*{Min}_{y \in F} \|x - y\|$$

Ainsi :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

Exemple. Justifier l'existence et déterminer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$$

4.4 Algorithme d'orthonormalsation de Gram-Schmidt

Théorème de Gram-Schmidt.

Partant d'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ supposée libre de E (par exemple une base), il existe une unique famille $(e_1, \dots, e_p)$ telle que :

- $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Algorithme. Cette famille peut être construite par l'algorithme suivant : Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on définit $e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k)$ (où p_{k-1} désigne la projection orthogonale sur $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$) et $e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$.
Comme F_{k-1} est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

Remarque. *La matrice de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ dans la base $(u_1, \dots, u_p)$ de F_p est triangulaire supérieure.*

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

5.1 Représentation des formes linéaires

Théorème de représentation des formes linéaires.

Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

Remarque. *Soit H un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On applique à φ le théorème précédent, et on a la définition suivante :*

Définition. Lorsque $H = \operatorname{Ker}\varphi$, où $\varphi \neq 0$, le vecteur a est orthogonal à l'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On dit que a est un **vecteur normal** à H.

Remarque. *Les vecteurs orthogonaux à H sont alors les vecteurs colinéaires à a.*

Corollaire. On conserve les notations précédentes.

Si E est muni d'une base orthonormée, et que a a pour coordonnées $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, alors une **équation de** H est donnée par :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff A^\top X = 0 \\ &\iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

Théorème.

Soit H un hyperplan de E, et a un vecteur normal de H. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}$$

Soit D un droite vectorielle de E, dirigée par un vecteur a. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$

6 Annexes

6.1 Annexe : projecteurs orthogonaux associés à une décomposition orthogonale de l'espace

Proposition. Soit E un espace euclidien, $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de p sous-espaces de E deux à deux orthogonaux. On suppose que la somme (qui est directe orthogonale) des F_i est E :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} {}^{\perp} F_i$$

On définit, pour tout i, p_i la projection orthogonale sur F_i, c'est-à-dire la projection sur F_i, de direction $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{j\neq i}} F_j$. Alors :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{p} p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

6.2 Annexe : une démonstration astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve.

- Si x ou y est nul, l'inégalité est triviale.
- On suppose x et y non nul. Calculons, pour $\varepsilon = \pm 1$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= 2 + 2\varepsilon \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \end{aligned}$$

donc :

$$-\|x\|\,\|y\| \leqslant \varepsilon \langle x, y\rangle$$

c'est-à-dire :

$$-\|x\|\,\|y\| \leqslant \langle x, y\rangle \text{ et } -\|x\|\,\|y\| \leqslant -\langle x, y\rangle$$

soit encore :

$$-\|x\|\,\|y\| \leqslant \langle x, y\rangle \text{ et } \|x\|\,\|y\| \geqslant \langle x, y\rangle$$

ce qui fournit l'inégalité annoncée, ainsi que le cas d'égalité.

□

Remarque. *Cette démonstration est assez peu connue des correcteurs et interrogateurs des concours, et il n'est pas recommandé de l'utiliser au concours : on lui préfèrera la version traditionnelle.*

Exercices et résultats classiques à connaître

Calcul d'une borne inf avec un projeté orthogonal

310.1

On note $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(c) On considère k entier $\geqslant 2$. Calculer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \big(t^k - at - b\big)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

La matrice de Gramm

310.2

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

Un orthonormalisation

310.3

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2 - 1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

Exercices du CCINP

310.4 CCINP 39.13

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\,||$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

310.5 CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

310.6 CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

310.7 CCINP 79.23

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

310.8 CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

310.9 CCINP 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

310.10 — INP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

310.11 — INP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Exercices

310.12

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que, pour $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f(e_k) \rangle$$

310.13

Montrer que, pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

310.14

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

(a) Démontrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

310.15

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.

310.16

(a) Montrer que le système $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x+3y+z-t=0 \end{cases}$ définit un plan P de $\mathbb{R}^4$.

(b) Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de P.

(c) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur P, puis de la symétrie orthogonale par rapport à P.

(d) Soit $v = (1, 1, 1, -1)$: calculer $d(v, P)$.

310.17

Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base orthonormée.

310.18

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

(a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(b) Trouver une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) telle que $\deg(P_k) = k$.

(c) Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Petits problèmes d'entrainement

310.19

On note $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u, v \in E$, on pose :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

On note F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, et $v \in E \setminus F$.

(c) Donner un exemple de suite $v = (v_n)_n$.

(d) Déterminer $F^\perp$. Est-ce que F et $F^\perp$ sont supplémentaires ?

(e) On pose $G = \mathrm{Vect}(v)$. Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$.

310.20

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Calculer la distance $d\big(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\big)$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

310.21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E euclidien de dimension n. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

310.22

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites réelles bornées, et F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{B}$ en posant :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$$

(b) Déterminer $F^{\perp}$.

(c) Est-ce que $F^{\perp\perp} = F$?

310.23

Soit A une partie de E espace préhilbertien.

(a) Montrer que $A^{\perp}$ est une partie fermée.

(b) Montrer que A et $\overline{A}$ ont le même orthogonal.

310.24

Soit E un espace vectoriel normé réel, et S la sphère de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de norme 1.

(a) Est-il vrai que, pour $x, y \in S$ avec $x \neq y$:

$$\forall \lambda \in]0,1[,\ (1-\lambda)x + \lambda y \notin S\,?$$

(b) Et si E est un espace préhilbertien, et que la norme est la norme euclidienne ?

310.25

Soit E euclidien, a, b deux vecteurs unitaires de E. On définit f l'endomorphisme de E :

$$f\ :\ x \mapsto x - \langle a, x\rangle b$$

(a) À quelle condition f est bijectif ?

(b) À quelle condition f est diagonalisable ?

310.26

Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a, b deux vecteurs unitaires de E. On définit f par :

$$f\ :\ x \mapsto \langle a, x\rangle\langle b, x\rangle$$

Déterminer le maximum et le minimum de f sur la sphère unité de E.

310.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Comparer $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}(A^\top A)$.

(b) Comparer $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Im}(AA^\top)$.

310.28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker}(A^\top + A) = \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(A^\top)$.

(b) En déduire :

$$A^\top + A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Ker}(A)$$

310.29

Soit E un espace préhilbertien réel, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On s'intéresse à p projecteur de E.

(a) Montrer que, si p est un projecteur orthogonal, alors :

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

(b) Réciproquement, on suppose que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

b1. Pour $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \operatorname{Ker} p$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$0 \leqslant 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

b2. En déduire que le projecteur p est orthgonal.

310.30

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On note q_n la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$, $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^n - q_{n-1}(X^n)$.

(a) Justifier que $(P_n)_n$ est une famille libre.

(b) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$:

$$k \neq n \implies \langle P_k, P_n\rangle = 0$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $P_n - XP_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et P_{n-2}.

310.31

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, calculer :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

310.32

E est un espace euclidien de dimension n pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

Montrer que Ker u et Im u sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de u est pair.

310.33

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Montrer que $\det(A) > 0$.