

# Espaces préhilbertiens réels

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
-----------------------	----------

<b>Cours</b>	<b>3</b>
1 Produit scalaire et norme associée . . . . .	3
1.1 Produit scalaire . . . . .	3
1.2 Exemples de référence . . . . .	3
1.3 Autres exemples . . . . .	4
1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	4
1.5 Norme euclidienne . . . . .	4
1.6 Identités remarquables . . . . .	5
2 Orthogonalité . . . . .	5
2.1 Vecteurs orthogonaux . . . . .	5
2.2 Sous-espaces orthogonaux . . . . .	5
2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie . . . . .	6
2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel . . . . .	6
3 Bases orthonormées d'un espace euclidien . . . . .	6
3.1 Existence de bases orthonormées . . . . .	6
3.2 Construction de bases orthonormées . . . . .	6
3.3 Coordonnées dans une base orthonormée . . . . .	7
4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . . .	7
4.1 Théorème de la base orthonormée incomplète . . . . .	7
4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . . .	7
4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . . .	8
4.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . . .	8
5 Formes linéaires sur un espace euclidien . . . . .	9
5.1 Représentation des formes linéaires . . . . .	9
5.2 Distance à un hyperplan, à une droite . . . . .	9
6 Annexes . . . . .	10
6.1 Annexe : projecteurs orthogonaux associés à une décomposition orthogonale de l'espace . . . . .	10
6.2 Annexe : une démonstration astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	10

<b>Exercices</b>	<b>11</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	11
Calcul d'une borne inf avec un projeté orthogonal . . . . .	11
La matrice de Gramm . . . . .	11
Une orthonormalisation . . . . .	11
Exercices du CCINP . . . . .	12
Exercices . . . . .	13
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	14

**Je me souviens**

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
2. Qu'est-ce qu'une norme ? Lien entre produit scalaire et norme ?
3. Donner des exemples de produits scalaires et de normes.
4. Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?
5. Expression du produit scalaire dans une b.o.n.  $(e_1, \dots, e_n)$ . Et la norme ?
6. Expression des coordonnées du vecteur  $x$  dans cette b.o.n. ?
7. Comment définit-on deux vecteurs orthogonaux ? Et l'orthogonal d'un sev ?
8. Méthodes pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre ?
9. Qu'est-ce que le théorème de Pythagore ?
10. Si  $a$  est un vecteur non nul, comment construire un vecteur unitaire colinéaire à  $a$  ?
11. Expression du projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur la droite vectorielle  $D = \text{Vect}(a)$  ?
12. Soit  $F$  un sev dont on connaît une b.o.n.  $(e_1, \dots, e_q)$  ; expression du projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  ?
13. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## 1 Produit scalaire et norme associée

### 1.1 Produit scalaire

**Définition.** On appelle **produit scalaire** sur  $E$  une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur  $E$ , c'est-à-dire, en notant  $\varphi$  cette application :

- $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;
- $\varphi$  est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  ;
- $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$  ;
- $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ .

**Remarque.** La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.

**Notation.** On note en général  $\langle x, y \rangle$ ,  $(x|y)$  ou  $x \cdot y$  le produit scalaire de  $x$  avec  $y$ .

**Définition.** Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**.  
S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

### 1.2 Exemples de référence

**Remarque.** Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.

**Définition.** Sur  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

**Définition.** Sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

Si  $A = (a_{ij})_{ij}$  et  $B = (b_{ij})_{ij}$ , on a de plus l'expression :

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

**Définition.** Sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

**Remarque.** Il coïncide avec le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un  $n$ -uplet.

On trouve parfois la définition  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^\top Y)$ . En effet, on a  $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ . La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice  $1 \times 1$ . On accepte cependant souvent de confondre  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ .

**Définition.** Sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

**Proposition.** Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

### 1.3 Autres exemples

**Remarque.** Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.

**Exemple.** En confondant polynôme et fonction polynomiale associée,  $\mathbb{R}[X]$  est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

**Exemple.** Toujours sur  $\mathbb{R}[X]$ , montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

définit un produit scalaire.

**Exemple.** Soit  $w$  une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle  $I$ . On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)w(t) dt$$

**Proposition.** Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

### 1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

Pour tout  $x, y \in E$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Remarque.** On notera  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.

**Inégalité de Minkowski.** Pour tout  $x, y \in E$ , on a :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

**Remarque.** Avec  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.

### 1.5 Norme euclidienne

**Définition.** On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'application :

$$\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Proposition.** C'est une norme.

**Définition.** Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.

**Proposition.** Si  $E$  est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur  $E \times E$ .

## 1.6 Identités remarquables

**Proposition.** On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

## 2 Orthogonalité

### 2.1 Vecteurs orthogonaux

**Définition.** Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note dans ce cas :  $x \perp y$ .

**Remarque.** Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de  $E$ , et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de  $E$  est nul.

**Définition.** Une famille  $(v_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

**Proposition.** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormée est libre.

**Exemple.** Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

**Théorème de Pythagore.**

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Cas d'une famille finie de vecteurs.** Si  $(v_1, \dots, v_p)$  est une famille orthogonale, alors  $\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$ .

### 2.2 Sous-espaces orthogonaux

**Définition.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$$

On note  $F \perp G$ .

**Proposition.** Lorsque  $F \perp G$ , la somme  $F + G$  est directe, et on la note  $F \oplus G$ .

**Proposition.** Si  $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe

et on la note  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

## 2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **orthogonal de  $A$**  l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } \forall a \in A, x \perp a\}$$

**Exemple.**  $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ .

**Proposition.** Soit  $A$  une partie de  $E$  espace préhilbertien.

- $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- Si  $A \subset B$ , alors  $B^\perp \subset A^\perp$
- $A \perp B$  signifie que  $A \subset B^\perp$  et  $B \subset A^\perp$ .

**Remarque.** Pour la dernière propriété, penser à deux droites dans l'espace usuel de dimension 3.

## 2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

**Proposition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F^\perp$  est orthogonal à  $F$  :

$$F \oplus F^\perp$$

mais, en général,  $F \oplus F^\perp \subsetneq E$ .

**Exemple.** Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire usuel, et  $F$  le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Déterminer  $F^\perp$ .

**Remarque.** On verra au § 4 que, lorsque  $F$  est de dimension finie (en particulier dans un espace euclidien),  $F^\perp$  et  $F$  sont supplémentaires.

# 3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section,  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 3.1 Existence de bases orthonormées

**Définition.** On appelle **base orthonormée** de  $E$  toute base de  $E$  qui soit aussi une famille orthonormée.

**Proposition.** Toute famille orthonormée de  $n$  vecteurs, lorsque  $n = \dim E$ , est une base orthonormée.

**Théorème.**

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

**Remarque.** On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.

**Exemple.** Avec le produit scalaire usuel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la famille :

$$\left( (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}) \right)_{1 \leq i < j \leq n}, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji}) \right)_{1 \leq i < j \leq n} \right)$$

est une base orthonormée.

## 3.2 Construction de bases orthonormées

Voir l'algorithme de Gram-Schmidt au § 4.4.

### 3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ , et  $x$  un vecteur de  $E$ . Ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$

sont :  $\begin{pmatrix} \langle e_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x \rangle \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

**Remarque.** Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs.

Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ ,  $x$  et  $y$  deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{X^T X}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**Remarque.** On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $M = (m_{ij})_{ij}$  la matrice de  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Alors, pour tout  $i, j$  :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

## 4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

### 4.1 Théorème de la base orthonormée incomplète

**Théorème de la base orthonormée incomplète.**

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une famille orthonormée de  $E$  euclidien de dimension  $n$ , on peut la compléter en une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

### 4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

**Définition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ . On appelle **projection orthogonale sur  $F$** , et on note  $p_F$ , la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Remarque.** Rappelons que, par définition,  $p_F(x)$  est l'unique vecteur  $y$  tel que :

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

Ceci fournit une méthode de détermination de  $p_F(x)$  par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de  $F$ .

**Remarque.** On a supposé  $F$  de dimension finie, mais si  $F$  est de dimension infinie et que  $F \oplus F^\perp = E$ , alors la projection orthogonale est bien définie.

**Proposition.** Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$ , alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

**Remarque.** Ceci fournit une seconde méthode de détermination de  $p_F(x)$ , lorsque l'on connaît une base orthonormée de  $F$ .

**Exemple.** Soit  $a \in E$  un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(a)$ , et celle sur  $\text{Vect}(a)^\perp$ .

**Exemple.** Dans  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de  $t \mapsto t^2$  sur  $F = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$ .

### 4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

**Définition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $x \in E$ . On appelle **distance de  $x$  à  $F$**  la quantité :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

**Théorème.**

Si  $F$  est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est l'unique vecteur de  $F$  qui réalise la distance précédente :

C'est l'unique  $y_0 \in F$  tel que :

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

Ainsi :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

**Exemple.** Justifier l'existence et déterminer :

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

### 4.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

**Théorème de Gram-Schmidt.**

Partant d'une famille  $(u_1, \dots, u_p)$  supposée libre de  $E$  (par exemple une base), il existe une unique famille  $(e_1, \dots, e_p)$  telle que :

- $(e_1, \dots, e_p)$  est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle e_k, v_k \rangle > 0$ .

**Algorithme.** Cette famille peut être construite par l'algorithme suivant : Pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , on définit

$$e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k) \quad (\text{où } p_{k-1} \text{ désigne la projection orthogonale sur } F_{k-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})) \text{ et } e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}.$$

Comme  $F_{k-1}$  est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

**Remarque.** La matrice de la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  dans la base  $(u_1, \dots, u_p)$  de  $F_p$  est triangulaire supérieure.



## 5 Formes linéaires sur un espace euclidien

### 5.1 Représentation des formes linéaires

#### Théorème de représentation des formes linéaires.

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur un espace euclidien  $E$ . Alors il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

**Remarque.** Soit  $H$  un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  telle que  $H = \text{Ker } \varphi$ . On applique à  $\varphi$  le théorème précédent, et on a la définition suivante :

**Définition.** Lorsque  $H = \text{Ker } \varphi$ , où  $\varphi \neq 0$ , le vecteur  $a$  est orthogonal à l'hyperplan  $H = \text{Ker } \varphi$ . On dit que  $a$  est un **vecteur normal** à  $H$ .

**Remarque.** Les vecteurs orthogonaux à  $H$  sont alors les vecteurs colinéaires à  $a$ .

**Corollaire.** On conserve les notations précédentes.

Si  $E$  est muni d'une base orthonormée, et que  $a$  a pour coordonnées  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , alors une **équation de**  $H$  est donnée par :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff A^\top X = 0 \\ &\iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

#### Théorème.

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ , et  $a$  un vecteur normal de  $H$ . Alors pour tout  $x \in E$ , on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}$$

Soit  $D$  une droite vectorielle de  $E$ , dirigée par un vecteur  $a$ . Alors, pour tout  $x \in E$ , on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$

## 6 Annexes

### 6.1 Annexe : projecteurs orthogonaux associés à une décomposition orthogonale de l'espace

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  sous-espaces de  $E$  deux à deux orthogonaux. On suppose que la somme (qui est directe orthogonale) des  $F_i$  est  $E$  :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$$

On définit, pour tout  $i$ ,  $p_i$  la projection orthogonale

sur  $F_i$ , c'est-à-dire la projection sur  $F_i$ , de direction  $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ . Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

### 6.2 Annexe : une démonstration astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

#### Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout  $x, y \in E$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Preuve.*

- Si  $x$  ou  $y$  est nul, l'inégalité est triviale.
- On suppose  $x$  et  $y$  non nul. Calculons, pour  $\varepsilon = \pm 1$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= 2 + 2\varepsilon \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \end{aligned}$$

donc :

$$-\|x\| \|y\| \leq \varepsilon \langle x, y \rangle$$

c'est-à-dire :

$$-\|x\| \|y\| \leq \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad -\|x\| \|y\| \leq -\langle x, y \rangle$$

soit encore :

$$-\|x\| \|y\| \leq \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad \|x\| \|y\| \geq \langle x, y \rangle$$

ce qui fournit l'inégalité annoncée, ainsi que le cas d'égalité.  $\square$

**Remarque.** Cette démonstration est assez peu connue des correcteurs et interrogateurs des concours, et il n'est pas recommandé de l'utiliser au concours : on lui préférera la version traditionnelle.

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Calcul d'une borne inf avec un projeté orthogonal

#### 310.1

On note  $E = \mathbb{R}[X]$ .

- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

- (b) Calculer, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ .

- (c) On considère  $k$  entier  $\geq 2$ . Calculer :

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt$$

### La matrice de Gramm

#### 310.2

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Pour  $(u_1, \dots, u_p)$  famille de vecteurs de  $E$ , on note  $G(u_1, \dots, u_p)$  la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont le coefficient d'indice  $i, j$  est  $\langle u_i | u_j \rangle$ .

- (a) Montrer que la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée si et seulement si  $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$
- (b) Montrer que, si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , alors, pour tout  $x \in E$  :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

### Un orthonormalisation

#### 310.3

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , où  $n \geq 1$ .

- (a) Vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur  $E$ .

On note  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base obtenue par orthonormalisation de la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .

- (b) Pour tout entier  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on définit :

$$f_k(X) = \frac{d^k}{dX^k} ((X^2 - 1)^k)$$

- b1. Déterminer le degré de  $f_k$ .
- b2. Calculer  $\langle X^i, f_k \rangle$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .
- b3. En déduire que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un  $\lambda_k$  tel que  $f_k = \lambda_k e_k$ .

## Exercices du CCINP

**310.4**
 **39.13**

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que la série  $\sum x_n^2$  converge.

1. (a) Démontrer que, pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , la série  $\sum x_n y_n$  converge.

On pose alors  $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ .

- (b) Démontrer que  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $(|)$  est un produit scalaire dans  $\ell^2$ . On suppose que  $\ell^2$  est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée  $\| \cdot \|$ .

3. On considère l'ensemble  $F$  des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.  
Déterminer  $F^\perp$  (au sens de  $(|)$ ).  
Comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

**310.5**
 **76**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ . On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
2. Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

**310.6**
 **77**

Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .
2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
(a) Démontrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .  
(b) Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**310.7**
 **79.23**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

2. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On pose :  $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .  
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
3. Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**310.8**
 **80**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ .

Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

**310.9**
 **81**

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

### 310.10



Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ .

On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

1. Démontrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

### 310.11



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On pose :  $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  où  $\text{tr}$  désigne la trace et  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$ .

1. Prouver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$ .  
Une matrice  $A$  de  $E$  est dite antisymétrique lorsque  $A^T = -A$ .  
On note  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E$ .  
On admet que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

(a) Prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

(b) Prouver que  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .

3. Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ .  
Déterminer  $F^\perp$ .

## Exercices

### 310.12

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .  
Montrer que, pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  :

$$\text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, f(e_k) \rangle$$

### 310.13

Montrer que, pour  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  :

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

### 310.14

Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , alors on pose  $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

- (a) Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (b) Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

### 310.15

$\mathbb{R}^4$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur  $F$ .

### 310.16

- (a) Montrer que le système  $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$  définit un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Construire une base orthonormale  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $P$ .
- (c) Écrire la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  de la projection orthogonale sur  $P$ , puis de la symétrie orthogonale par rapport à  $P$ .
- (d) Soit  $v = (1, 1, 1, -1)$  : calculer  $d(v, P)$ .

### 310.17

Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t) dt$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$  et en déterminer une base orthonormée.

### 310.18

Sur  $\mathbb{R}_2[X]$ , on définit :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

- (a) Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
- (b) Trouver une base orthonormale  $(P_0, P_1, P_2)$  telle que  $\deg(P_k) = k$ .
- (c) Déterminer la projection orthogonale de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

## Petits problèmes d'entraînement

### 310.19

On note  $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_n$  telles que la série  $\sum u_n^2$  converge. Pour  $u, v \in E$ , on pose :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(a) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

(b) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

On note  $F$  le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, et  $v \in E \setminus F$ .

- (c) Donner un exemple de suite  $v = (v_n)_n$ .
- (d) Déterminer  $F^\perp$ . Est-ce que  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires ?
- (e) On pose  $G = \text{Vect}(v)$ . Comparer  $F^\perp + G^\perp$  et  $(F \cap G)^\perp$ .

### 310.20

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique.

- (a) Montrer que  $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Calculer la distance  $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$ , où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

### 310.21

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  euclidien de dimension  $n$ . On considère  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1$$

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

### 310.22

On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des suites réelles bornées, et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}$  formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathcal{B}$  en posant :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$$

- (b) Déterminer  $F^\perp$ .
- (c) Est-ce que  $F^{\perp\perp} = F$  ?

**310.23**

Soit  $A$  une partie de  $E$  espace préhilbertien.

- (a) Montrer que  $A^\perp$  est une partie fermée.
- (b) Montrer que  $A$  et  $\overline{A}$  ont le même orthogonal.

**310.24**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé réel, et  $S$  la sphère de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de norme 1.

- (a) Est-il vrai que, pour  $x, y \in S$  avec  $x \neq y$  :

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, (1 - \lambda)x + \lambda y \notin S ?$$

- (b) Et si  $E$  est un espace préhilbertien, et que la norme est la norme euclidienne ?

**310.25**

Soit  $E$  euclidien,  $a, b$  deux vecteurs unitaires de  $E$ . On définit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  :

$$f : x \mapsto x - \langle a, x \rangle b$$

- (a) À quelle condition  $f$  est bijectif ?
- (b) À quelle condition  $f$  est diagonalisable ?

**310.26**

Soit  $E$  euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $a, b$  deux vecteurs unitaires de  $E$ . On définit  $f$  par :

$$f : x \mapsto \langle a, x \rangle \langle b, x \rangle$$

Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur la sphère unité de  $E$ .

**310.27**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Comparer  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Ker}(A^\top A)$ .
- (b) Comparer  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Im}(AA^\top)$ .

**310.28**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = 0$ .

- (a) Montrer que  $\text{Ker}(A^\top + A) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^\top)$ .
- (b) En déduire :

$$A^\top + A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$$

**310.29**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée. On s'intéresse à  $p$  projecteur de  $E$ .

- (a) Montrer que, si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors :

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

- (b) Réciproquement, on suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

- b1. Pour  $x \in \text{Im } p$ ,  $y \in \text{Ker } p$  et  $t \in \mathbb{R}$ , montrer que :

$$0 \leq 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

- b2. En déduire que le projecteur  $p$  est orthogonal.

**310.30**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note  $q_n$  la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $P_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n = X^n - q_{n-1}(X^n)$ .

- (a) Justifier que  $(P_n)_n$  est une famille libre.
- (b) Montrer que, pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$  :

$$k \neq n \implies \langle P_k, P_n \rangle = 0$$

- (c) Soit  $n \geq 2$ . Montrer que  $P_n - XP_{n-1}$  est combinaison linéaire de  $P_{n-1}$  et  $P_{n-2}$ .

**310.31**

Pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , calculer :

$$m_k = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt$$

**310.32**

$E$  est un espace euclidien de dimension  $n$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

Montrer que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de  $u$  est pair.

**310.33**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ . Montrer que  $\det(A) > 0$ .

**310.34**

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée. On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

Est-ce que la famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est nécessairement une base orthonormale de  $E$  ?

**310.35**

On munit l'espace  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p_n : t \mapsto t^n$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[a, b]$ .

- (a) Justifier que la famille  $(p_n)_n$  est totale, c'est-à-dire qu'elle engendre un espace vectoriel dense dans  $E$ .

- (b) Déterminer l'orthogonal de  $\mathcal{P}$ .

**310.36**

Soit  $E$  euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_{n+2}$  des vecteurs de  $E$ . Montrer qu'il est impossible d'avoir :

$$\forall i, j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

**310.37**

Soit  $p$  un projecteur d'un espace euclidien  $E$ . On suppose que :

$$\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$$

Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal.

**310.38**

On note  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On définit sur  $E \times E$  l'application  $\varphi$  par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$$

On définit les deux ensembles :

$$\begin{aligned} V &= \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = f(1) = 0\} \\ W &= \{f \in E \text{ t.q. } f'' \text{ existe et } f'' = f\} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est bien un produit scalaire sur  $E$ .  
 (b) Montrer que  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie, et en donner une base.  
 (c) Montrer que  $V$  est le supplémentaire orthogonal de  $W$  dans  $E$ . Donner l'expression de la projection orthogonale sur  $W$ .  
 (d) Pour  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , on définit :

$$E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$$

$$\text{Calculer } \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left( \int_0^1 (f^2 + f'^2) \right).$$