

# Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien . . . . .	2
1.1 Définition, matrice de l'adjoint en base orthonormée . . . . .	2
1.2 Propriétés . . . . .	2
2 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien . . . . .	2
2.1 Définition, matrice en base orthonormée . . . . .	2
2.2 Projecteurs orthogonaux . . . . .	3
2.3 Le théorème spectral . . . . .	3
2.4 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs . . . . .	3
3 Isométries d'un espace euclidien . . . . .	4
3.1 Définition . . . . .	4
3.2 Caractérisations . . . . .	4
3.3 Propriétés . . . . .	5
3.4 Le groupe $O(E)$ . . . . .	5
4 Matrices orthogonales . . . . .	5
4.1 Définition . . . . .	5
4.2 Caractérisations . . . . .	5
4.3 Propriétés . . . . .	5
4.4 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ . . . . .	6
5 Orientation . . . . .	6
5.1 Orientation d'un espace vectoriel réel . . . . .	6
5.2 Orientation d'un hyperplan . . . . .	6
5.3 Espace euclidien orienté, produit mixte . . . . .	6
6 Étude des isométries vectorielles . . . . .	7
6.1 Isométries vectorielles en dimension 2 . . . . .	7
6.2 Réduction des isométries en dimension $n$ . . . . .	8
6.3 Cas particulier de la dimension 3 . . . . .	8
7 Annexes . . . . .	8
7.1 Annexe : l'adjoint est un endomorphisme . . . . .	8
7.2 Annexe : démonstration du théorème spectral . . . . .	9
7.3 Annexe : une autre démonstration du théorème spectral . . . . .	10
7.4 Complément : une autre démonstration du théorème spectral . . . . .	10
7.5 Annexe : normes subordonnées et rayons spectraux . . . . .	11
<b>Exercices</b>	<b>13</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	13
Caractérisation des symétries orthogonales, des projecteurs orthogonaux . . . . .	13
Racine carrée d'une matrice symétrique positive . . . . .	13
Décomposition polaire d'une matrice inversible . . . . .	13
Matrice de Householder . . . . .	13
Matrice de Hilbert . . . . .	13
Une formule variationnelle . . . . .	13
Exercices du CCINP . . . . .	14
Exercices . . . . .	15
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	16

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire,  $E$  est un espace euclidien et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est son produit scalaire.

## 1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

### 1.1 Définition, matrice de l'adjoint en base orthonormée

**Définition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

L'endomorphisme  $u^*$  s'appelle l'**adjoint** de  $u$ .

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\text{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = \text{Mat}(u, \mathcal{B})^\top$$

**Remarque.** L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.

**Corollaire.**  $u$  et  $u^*$  ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même spectre.

**Remarque.** En revanche, ils n'ont pas les mêmes vecteurs propres.

### 1.2 Propriétés

**Proposition.** Pour  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  :

- $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$
- $(u^*)^* = u$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- Si  $u$  est bijectif,  $u^*$  aussi et  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

**Proposition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

## 2 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

### 2.1 Définition, matrice en base orthonormée

**Définition.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est **autoadjoint** lorsque  $u^* = u$ , i.e. :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de  $E$ .

**Remarque.** On qualifie parfois les endomorphismes autoadjoints (i.e.  $u^* = u$ ) de *symétriques*, mais on évitera cette terminologie, car il n'y a aucune raison que ça soit une symétrie (i.e.  $u \circ u = \text{Id}_E$ ).

**Proposition.** Soit  $u$  endomorphisme autoadjoint de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

**Proposition.** Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $n$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Fixons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

c'est-à-dire que  $u$  est autoadjoint si et seulement si sa matrice en base orthonormée est symétrique.

**Remarque.** L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.

**Corollaire.** La dimension de  $\mathcal{S}(E)$  est  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

## 2.2 Projecteurs orthogonaux

**Proposition.** Soit  $p$  un projecteur (i.e.  $p \circ p = p$ ). Alors  $p$  est un projecteur orthogonal (i.e.  $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$ ) si et seulement si  $p$  est autoadjoint.

## 2.3 Le théorème spectral

**Théorème spectral - version endomorphisme.**

Soit  $E$  espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}(E) &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u) \\ &\iff \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée t.q. } \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ diagonale} \end{aligned}$$

**Remarque.**

- On dit parfois que tout endomorphisme autoadjoint d'une espace euclidien est *orthodiagonalisable*.
- On note bien que les espaces propres des endomorphismes autoadjoints sont orthogonaux.

**Théorème spectral matriciel.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff A \text{ est orthogonalement diagonalisable}$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$A = PDP^{\top}$$

où  $D$  est une matrice diagonale et  $P$  une matrice orthogonale, c'est-à-dire une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ .

**Remarque.** L'étude des matrices orthogonale est menée au § 4. On y montre que les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormées, et qu'on les inverse en transposant.

## 2.4 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

**Définition.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. On dit qu'il est **positif** lorsque :

$$\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$$

On dit qu'il est **défini positif** lorsque :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle x, u(x) \rangle > 0$$

On note  $\mathcal{S}^+(E)$  (resp.  $\mathcal{S}^{++}(E)$ ) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs).

**Remarque.**

- Pour montrer que  $u$  est défini positif, on peut aussi montrer :

$$\forall x \in E, \begin{cases} \langle x, u(x) \rangle \geq 0 \\ \langle x, u(x) \rangle = 0 \implies x = 0 \end{cases}$$

- On ne qualifie un endomorphisme de positif que s'il est déjà autoadjoint.
- $\mathcal{S}^+(E)$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).

**Définition.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. On dit qu'elle est **positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), X^\top A X \geq 0$$

On dit qu'elle est **définie positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^\top A X > 0$$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

**Remarque.**

- Pour montrer que  $A$  est définie positive, on peut aussi montrer :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \begin{cases} X^\top A X \geq 0 \\ X^\top A X = 0 \implies X = 0 \end{cases}$$

- On ne qualifie une matrice de positive que si elle est déjà symétrique.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).

**Caractérisation spectrale - version endomorphisme.**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. Alors :

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

**Caractérisation spectrale - version matricielle.**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

### 3 Isométries d'un espace euclidien

#### 3.1 Définition

**Définition.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On l'appelle **isométrie vectorielle** lorsqu'elle conserve les normes :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

On note  $O(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles.

**Remarque.** On trouve aussi, dans la littérature, la terminologie *automorphisme orthogonal*.

**Exemple.** Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Les projecteurs orthogonaux ne sont pas, en général, des isométries vectorielles.

#### 3.2 Caractérisations

**Proposition.** l'endomorphisme  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

**Proposition.** L'endomorphisme  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormée de  $E$  par  $u$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Proposition.** L'endomorphisme  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si :

$$u \circ u^* = \text{Id}_E$$

ou encore, c'est équivalent,  $u^* \circ u = \text{Id}_E$ . Ainsi, les éléments de  $O(E)$  sont les automorphismes de  $E$  dont l'inverse est l'adjoint.

### 3.3 Propriétés

**Proposition.** Toute isométrie vectorielle est bijective : c'est un automorphisme de  $E$ .

**Proposition.** Soit  $u \in O(E)$ . Alors  $\det(u) = \pm 1$

**Remarque.** Attention ! la réciproque est bien-sûr fausse.

### 3.4 Le groupe $O(E)$

**Proposition.**  $O(E)$  est un sous-groupe de  $(GL(E), \circ)$ . On appelle  $O(E)$  le **groupe orthogonal** de  $E$ .

**Définition.** On note  $SO(E) = \{u \in O(E), \det(u) = 1\}$ . C'est un sous-groupe de  $O(E)$ , appelé le **groupe spécial orthogonal**.

Ses éléments sont les isométries vectorielles **directes**.

Les éléments de  $O(E) \setminus SO(E)$  sont les isométries vectorielles **indirectes**.

## 4 Matrices orthogonales

### 4.1 Définition

**Définition.** On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une **matrice orthogonale** si et seulement si :

$$AA^T = I_n$$

On note  $O_n(\mathbb{R})$  (ou parfois  $O(n)$ ) l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### 4.2 Caractérisations

**Proposition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Sont équivalentes :

- (i)  $A$  est une matrice orthogonale ;
- (ii)  $A^T A = I_n$ , i.e. les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  ;
- (iii)  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^T$  ;
- (iv)  $AA^T = I_n$ , i.e. les lignes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$  ;

**Proposition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors :

$$u \in O(E) \iff \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \in O_n(\mathbb{R})$$

**Remarque.** L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , et  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$$

et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

### 4.3 Propriétés

**Proposition.** Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors :

- $A$  est inversible, et  $A^{-1} = A^T$
- $\det A = \pm 1$

## 4.4 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$

**Proposition.**  $O_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ . On appelle  $O_n(\mathbb{R})$  le **groupe orthogonal d'ordre  $n$** .

**Définition.** On note  $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$  (parfois aussi noté  $O_n^+(\mathbb{R})$ ). C'est un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$ , appelé le **groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$** .

Ses éléments sont les matrices orthogonales **directes** (ou **positives**).

Les éléments de  $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$  sont les matrices orthogonales **indirectes** (ou **négatives**).

## 5 Orientation

### 5.1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Fixons  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

**Remarque.** Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , on sait que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  est un réel non nul.

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  désigne le déterminant de la famille des vecteurs de  $\mathcal{B}'$ , exprimés en coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ .

**Définition.** On dit que  $\mathcal{B}$  a la même orientation que  $\mathcal{B}'$  lorsque  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ .

**Proposition.** « a la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$ . Il y a exactement deux classes d'équivalences.

**Définition.** **Orienter**  $E$ , c'est faire le choix de l'une des deux classes d'équivalence pour la relation « a la même orientation ». On fait en général ce choix à travers le choix d'une base particulière, un représentant de la classe choisie. Les bases de cette classe sont dites **directes**, les autres **indirectes**.

**Exemple.** En général, on oriente  $\mathbb{R}^n$  en choisissant la base canonique directe.

### 5.2 Orientation d'un hyperplan

**Définition.** Soit  $E$  un espace euclidien orienté, et  $H$  un hyperplan de  $E$ . On oriente  $H$  par le choix d'un vecteur normal  $a$  : une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $H$  est **directe** lorsque  $(e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{a}{\|a\|})$  est une base directe de  $E$ .

### 5.3 Espace euclidien orienté, produit mixte

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien orienté et  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

Le déterminant de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est le même dans toutes les bases orthonormales directes de  $E$ . On peut donc noter :

$$\det(x_1, \dots, x_n)$$

pour désigner  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ , où  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée quelconque de  $E$ .

**Remarque.** On trouve aussi la notation  $[x_1, \dots, x_n]$ , et l'appellation *produit mixte*.

**Remarque.** On peut reformuler le résultat précédent en disant que, pour  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées directes de  $E$  :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

**Proposition.** Dans le même contexte, si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$  :

$$[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)] = \det(u) \times [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

## 6 Étude des isométries vectorielles

### 6.1 Isométries vectorielles en dimension 2

#### 6.1.1 Étude des isométries vectorielles directes

**Théorème.**

Soit  $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ . Il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**Corollaire.**

- L'application :  $R : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$  est un morphisme surjectif de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$   
 $\theta \mapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$   
 dans  $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ . Son noyau est  $2\pi\mathbb{Z}$ .
- L'application :  $\mathbb{U} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$  est correctement définie, et est un isomorphisme de groupes  
 $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$   
 de  $(\mathbb{U}, \times)$  dans  $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ .

**Corollaire.**  $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), +)$  est un groupe commutatif.

**Remarque.** C'est une propriété tout à fait spécifique à la dimension 2.

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2. Si  $u \in \text{SO}(E)$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que la matrice de  $u$  soit, dans n'importe quelle base orthonormée directe de  $E$  :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Définition.** On dit que  $u$  est la **rotation vectorielle d'angle orienté  $\theta$** .

#### 6.1.2 Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls

**Définition.** Si  $x, y$  sont deux vecteurs unitaires de  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2, alors il existe une unique rotation  $u \in \text{SO}(E)$  telle que  $y = u(x)$ .

Si  $x, y$  deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté**  $(x, y)$  tout réel  $\theta$  tel que la rotation d'angle  $\theta$  envoie  $\frac{x}{\|x\|}$  sur  $\frac{y}{\|y\|}$ .

On a les relations :

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad \text{et} \quad [x, y] = \|x\| \|y\| \sin \theta$$

#### 6.1.3 Étude des isométries vectorielles indirectes

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit  $u \in \text{O}(E) \setminus \text{SO}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $E$ .

- $u$  est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et  $u$  est la réflexion par rapport à la droite dirigée par  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ .

## 6.2 Réduction des isométries en dimension $n$

**Lemme.** Soit  $u \in O(E)$

- Si  $F$  un sous-espace stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .
- Il y a au moins un plan ou une droite stable par  $u$ .
- Les seules valeurs propres (réelles) possibles pour  $u$  sont 1 et  $-1$ .

**Théorème.**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $u \in O(E)$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , des entiers  $m, p, q$  et des réels  $\theta_1, \dots, \theta_m$  tels que, par blocs :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

**Remarque.** Si  $u \in SO(E)$ , alors l'entier  $p$  est pair.

**Version matricielle.** Soit  $M \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $Q$  de la forme ci-dessus telles que :

$$M = PQP^{-1} = PQP^\top$$

## 6.3 Cas particulier de la dimension 3

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3,  $u \in SO(E)$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Remarque.**

- Contrairement au cas de la dimension 2, la forme de la matrice de  $u$  dépend fortement de la base choisie.
- Si l'on écarte le cas où  $u = \text{Id}_E$ , on constate que  $\text{Vect}(e_3)$  est la droite des vecteurs invariants par  $u$ .  $F = \text{Vect}(e_3)^\perp$ , orienté par  $e_3$ , est stable par  $u$ , et l'endomorphisme induit  $u_F$  est une rotation vectorielle d'angle  $\theta$ . On dit que  $u$  est **la rotation d'axe dirigé et orienté par  $e_3$  et d'angle  $\theta$** .
- Le programme officiel indique que « la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de  $SO_3(\mathbb{R})$  n'est pas un attendu du programme ».
- On doit néanmoins savoir trouver l'axe d'une rotation (c'est  $E_1(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ ), et dire que l'angle vérifie  $2\cos \theta + 1 = \text{tr}(u)$ , ce qui donne l'angle au signe près.

## 7 Annexes

### 7.1 Annexe : l'adjoint est un endomorphisme

**Définition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

L'endomorphisme  $u^*$  s'appelle l'**adjoint** de  $u$ .

*Preuve.*

- Tout d'abord, pour tout  $y \in E$  fixé, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de  $u$ ,  $x \mapsto \langle u(x), y \rangle$  est une forme linéaire. Alors, par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique vecteur  $a$  tel que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, a \rangle$$



et on peut noter  $u^*(y)$  ce vecteur  $a$ .

On a montré que  $u^*$  est bien défini, et à valeurs dans  $E$ .

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ Montrons maintenant la linéarité de } u^*. \\
 & \text{Soit } y_1, y_2 \in E, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \text{ Pour tout } x \in E, \text{ on a :} \\
 & \langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2) \rangle \\
 &= \langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \rangle - \alpha_1 \langle x, u^*(y_1) \rangle - \alpha_2 \langle x, u^*(y_2) \rangle \\
 & \quad \text{par bilinéarité} \\
 &= \langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle - \alpha_1 \langle u(x), y_1 \rangle - \alpha_2 \langle u(x), y_2 \rangle \\
 & \quad \text{par définition de } u^* \\
 &= \langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 \rangle \\
 & \quad \text{par bilinéarité} \\
 &= \langle u(x), 0 \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc  $u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$ , c'est donc le vecteur nul :

$$u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 u^*(y_1) + \alpha_2 u^*(y_2)$$

□

## 7.2 Annexe : démonstration du théorème spectral

**Lemme 1.** Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $\geq 1$ , et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Alors  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ .

**Remarque.** Il s'agit bien du spectre de  $u$  en tant qu'endomorphisme de  $E$ , donc des valeurs propres réelles de  $u$ .

*Preuve.*

- Notons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $S = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$  la matrice (symétrique réelle) de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_S$  est scindé dans  $\mathbb{C}$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  valeur propre de  $S$  vue comme matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

donc il existe  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nulle telle que :

$$SZ = \lambda Z$$

On a alors, d'une part :

$$\begin{aligned}
 \overline{Z}^T SZ &= \overline{Z}^T \lambda Z \\
 &= \lambda \overline{Z}^T Z \\
 &= \lambda (\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n) \\
 &= \lambda (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)
 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \overline{Z}^T SZ &= \overline{Z}^T \overline{S} Z \text{ car } S \text{ est réelle} \\
 &= \overline{SZ}^T Z \\
 &= \overline{\lambda Z}^T Z \\
 &= \overline{\lambda} (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)
 \end{aligned}$$

Comme  $Z \neq 0$ , on a  $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \neq 0$  et donc  $\lambda = \overline{\lambda}$  :  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

□

**Remarque.** On a même montré que toutes les valeurs propres de  $S$  sont réelles.

**Lemme 2.** Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $\geq 1$ , et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Alors  $u$  est diagonalisable.

*Preuve.* On raisonne par récurrence forte sur la dimension de  $E$ .

- Si  $E$  est de dimension 1,  $u$  est bien-sûr diagonalisable.
- Soit  $n \geq 2$ , on suppose que le résultat est vrai dans tout espace euclidien de dimension  $\leq n-1$ . Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{S}(E)$ . D'après le lemme 1, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  valeur propre de  $u$ . L'espace propre  $E_\lambda(u)$  est stable par  $u$  et  $u$  est autoadjoint, donc l'orthogonal  $F = E_\lambda(u)^\perp$  est aussi stable par  $u$ .  $E$  étant de dimension finie,  $\dim(F) = n - \dim(E_\lambda(u)) \leq n-1$ . On applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit  $u_F$ , qui est bien autoadjoint puisque  $u$  l'est. Ainsi  $u_F$  est diagonalisable. Mais  $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}$  est aussi diagonalisable et  $E = F \oplus E_\lambda(u)$  donc  $u$  est diagonalisable.
- On a montré le résultat, par récurrence.

□

**Lemme 3.** Soit  $E$  espace euclidien, et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Soit  $\lambda, \mu$  deux valeurs propres (réelles) distinctes de  $u$ . Alors  $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$ .

*Preuve.* Soit  $x \in E_\lambda(u)$  et  $y \in E_\mu(u)$ .

On calcule d'une part :

$$\begin{aligned}
 \langle u(x), y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle \\
 &= \lambda \langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \langle u(x), y \rangle &= \langle x, u(y) \rangle \text{ car } u \text{ autoadjoint} \\
 &= \langle x, \mu y \rangle \\
 &= \mu \langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

Comme  $\lambda \neq \mu$ , c'est que  $\langle x, y \rangle = 0$ .

□

### Théorème.

Soit  $E$  espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 u \in \mathcal{S}(E) &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\
 &\iff \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée} \\
 &\quad \text{t.q. } \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ diagonale}
 \end{aligned}$$

*Preuve.* Notons (i), (ii) et (iii) ces trois propriétés.

$$(i) \implies (ii)$$

Par le lemme 2, on a déjà  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ .

Par le lemme 3, les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Le résultat est donc acquis.

$$(ii) \implies (iii)$$

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ . On considère, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\mathcal{B}_i$  une base orthonormée de  $E_{\lambda_i}(u)$ . Notons alors  $\mathcal{B}$  la concaténation  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ . Comme  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ ,

$\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$  et on a, par blocs :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

$$(iii) \implies (i)$$

Notant  $S = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ , on a  $S^\top = S$  car  $S$  est diagonale, et donc  $u^* = u$  car  $\mathcal{B}$  est orthonormée.  $\square$

### 7.3 Annexe : une autre démonstration du théorème spectral

**Lemme 1.** Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $\geq 1$ , et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Alors  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ .

*Preuve.* On note  $\phi : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ .

- Comme  $u$  est linéaire en dimension finie, elle est continue. Le produit scalaire étant continu,  $\phi$  est continue. Sur la sphère unité  $S = S(0, 1)$ , fermée bornée en dimension finie, donc compacte,  $\phi$  admet donc un maximum atteint en  $x_0$  :

$$\exists x_0 \in S, \forall x \in S, \phi(x) \leq \phi(x_0)$$

Notons  $H = \text{Vect}(x_0)^\perp$ , et fixons  $y \in H$ .

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on note :

$$\psi(t) = \phi((\cos t)x_0 + (\sin t)y)$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \phi((\cos t)x_0 + (\sin t)y) \\ &\leq \phi(x_0) \text{ par définition du max} \\ &= \psi(0) \end{aligned}$$

donc la fonction réelle de variable réelle  $\psi$  admet un maximum en 0.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \langle u((\cos t)x_0 + (\sin t)y), (\cos t)x_0 + (\sin t)y \rangle \\ &= (\cos^2 t)\phi(x_0) + (\sin t)^2\phi(y) + (\cos t \sin t)\langle u(x_0), y \rangle \\ &\quad + (\cos t \sin t)\langle u(y), x_0 \rangle \\ &\quad \text{par linéarité de } u \text{ et bilinéarité du p.s.} \\ &= (\cos^2 t)\phi(x_0) + (\sin t)^2\phi(y) + (\sin 2t)\langle u(x_0), y \rangle \\ &\quad \text{car } u \text{ autoadjoint} \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (-2 \sin t \cos t)\phi(x_0) + (2 \cos t \sin t)\phi(y) \\ &\quad + (2 \cos 2t)\langle u(x_0), y \rangle \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  admet un maximum en  $t = 0$ , c'est que :

$$\langle u(x_0), y \rangle = 0$$

- On a montré que, pour tout  $y \in H$ ,  $\langle u(x_0), y \rangle = 0$ . Ainsi  $u(x_0) \in H^\perp$ . Mais  $H = \text{Vect}(x_0)$ , donc :

$$u(x_0) \in \text{Vect}(x_0)$$

Ainsi, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) = \lambda x_0$ . On a montré que  $x_0$  est vecteur propre de  $u$ , et trouvé  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ .  $\square$

### 7.4 Complément : une autre démonstration du théorème spectral

**Lemme 0.** Soit  $F$  un espace euclidien,  $v \in \mathcal{S}(F)$  un endomorphisme autoadjoint de  $F$ . Soit

$$Q = (X - \alpha)^2 + \beta \in \mathbb{R}[X]$$

où  $\beta > 0$ , un polynôme irréductible, écrit sous sa forme canonique.

Alors  $Q(v)$  est autoadjoint, défini-positif.

*Preuve.*

- Le polynôme d'endomorphisme est :

$$Q(v) = (v - \alpha \text{Id}_F)^2 + \beta \text{Id}_F$$

donc

$$\begin{aligned} (Q(v))^* &= ((v - \alpha \text{Id}_F)^2 + \beta \text{Id}_F)^* \\ &= (v^* - \alpha \text{Id}_F^*)^2 + \beta \text{Id}_F^* \\ &= (v - \alpha \text{Id}_F)^2 + \beta \text{Id}_F \\ &\quad \text{car } v \text{ et } \text{Id}_F \text{ autoadjoints} \\ &= Q(v) \end{aligned}$$

Ainsi  $Q(v)$  est autoadjoint.

- Pour  $x \in E$ , on calcule :

$$\begin{aligned} \langle Q(v)(x), x \rangle &= \langle ((v - \alpha \text{Id}_F)^2 + \beta \text{Id}_F)(x), x \rangle \\ &= \langle ((v - \alpha \text{Id}_F) \circ (v - \alpha \text{Id}_F))(x), x \rangle + \beta \langle x, x \rangle \\ &= \langle (v - \alpha \text{Id}_F)(x), (v - \alpha \text{Id}_F)(x) \rangle + \beta \langle x, x \rangle \\ &\quad \text{car } v - \alpha \text{Id}_F \text{ autoadjoint} \\ &= \|(v - \alpha \text{Id}_F)(x)\|^2 + \beta \|x\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $Q(v)$  est autoadjoint positif.

- Soit  $x \in E$  tel que  $\langle Q(v)(x), x \rangle = 0$ . C'est donc que  $\|(v - \alpha \text{Id}_F)(x)\|^2 + \beta \|x\|^2 = 0$  par le calcul précédent. Il s'agit d'une somme nulle de termes positifs, donc  $\beta \|x\|^2 = 0$  et donc  $\|x\| = 0$  car  $\beta > 0$ . Ainsi  $x = 0$ . Finalement, on a montré que  $Q(v)$  est autoadjoint défini positif.  $\square$

**Lemme 1.** Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $\geq 1$ , et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Alors  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ .

*Preuve.* Intéressons-nous à la décomposition en produit de polynômes irréductibles du polynôme minimal  $\pi_u$  de  $u$ . Supposons que cette décomposition comprenne un terme irréductible de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe  $Q$  et  $P$  tels que :

$$\pi_u = QP$$

où  $Q = (X - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\beta > 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{L}(E)} &= \pi_u(u) \\ &= Q(u) \circ P(u) \end{aligned}$$

Notons  $F = \text{Im}(P(u))$ . Comme  $u$  et  $P(u)$  commutent,  $F$  est stable par  $u$ . On note  $v = u_F$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ . L'égalité précédente s'écrit :

$$\forall x \in E, Q(u)(P(u)(x)) = 0$$

et donc, comme chaque  $y \in F$  s'écrit  $P(u)(x)$ ,

$$\forall y \in F, Q(v)(y) = 0$$

Mais le lemme 0 indique que  $Q(v)$  est autoadjoint défini positif, donc pour tout  $y \in F$ , si  $y \neq 0$ , alors  $\underbrace{\langle Q(v)(y), y \rangle}_{=0} > 0$ .

C'est donc que tout  $y \in F = \text{Im}(P(u))$  est nul, et donc que  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Ceci contredit la minimalité de  $\pi_u$ . C'est donc que  $\pi_u$  n'a pas de facteur irréductible de degré 2, donc est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , ce qui justifie la propriété annoncée.  $\square$

## 7.5 Annexe : normes subordonnées et rayons spectraux

On considère  $E$  un espace euclidien, on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne, et  $\|\cdot\|$  la norme d'opérateur sur  $\mathcal{L}(E)$ , subordonnée à  $\|\cdot\|$ .

**Lemme.** Pour tout  $x \in E$ ,

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle$$

*Preuve.*

- Pour tout  $y$  tel que  $\|y\| \leq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\leq \|x\| \|y\| && \text{Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|x\| && \text{indépendant de } y \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle \leq \|x\|.$$

- Le cas où  $y = \frac{x}{\|x\|}$  fournit un cas d'égalité dans l'inégalité précédente, donc :

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle = \|x\|$$

$\square$

**Proposition.** Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\|u^*\| = \|u\|$ .

*Preuve.* Si  $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $u^* = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et l'égalité est triviale. On suppose dorénavant  $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

- Pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle \\ &= \langle u^*(u(x)), x \rangle \text{ par définition de l'adjoint} \\ &\leq \|u^* \circ u(x)\| \|x\| \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|u^* \circ u\| \|x\| \|x\| \text{ par déf. de } \|\cdot\| \\ &\leq \|u^*\| \|u\| \|x\|^2 \text{ par sous-multiplicativité} \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\|u(x)\| \leq \sqrt{\|u^*\| \|u\|} \|x\|$$

On a donc, par définition de la norme d'opérateur :

$$\|u\| \leq \sqrt{\|u^*\| \|u\|}$$

et donc, comme  $\|u\| \neq 0$  :

$$\sqrt{\|u\|} \leq \sqrt{\|u^*\|}$$

c'est-à-dire, en élevant au carré :

$$\|u\| \leq \|u^*\|$$

- En appliquant ce qui précède à  $u^*$ , on a aussi :

$$\begin{aligned} \|u^*\| &\leq \|u^{**}\| \\ &= \|u\| \text{ car } u^{**} = u \end{aligned}$$

On a montré que  $\|u\| = \|u^*\|$ .  $\square$

**Définition.** Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on définit le **rayon spectral** :

$$\rho(u) = \text{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

**Proposition.** On dispose des résultats suivants :

- Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Alors :

$$\text{Max}(\text{Sp}(u)) = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

- Si de plus  $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ,

$$\text{Max}(\text{Sp}(u)) = \rho(u) = \|u\|$$

- Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  :

$$\|u\|^2 = \|u^* \circ u\| = \rho(u^* \circ u)$$

*Preuve.*

- Notons  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$ , classées par ordre croissant, répétées selon leurs multiplicités. Comme  $u$  est autoadjoint, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres, associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Rappelons qu'en base orthonormée, les coordonnées de  $x$  sont  $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ .

- Pour tout  $x \in E$  non nul :

$$\begin{aligned} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} &= \frac{1}{\|x\|^2} \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, u \left( \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, u(e_j) \rangle \\ &\quad \text{par linéarité de } u \\ &\quad \text{et bilinéarité du p.s.} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, \lambda_j e_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \lambda_i \quad \text{car } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\leq \frac{1}{\|x\|^2} \lambda_n \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \\ &= \lambda_n \text{ indépendant de } x \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sup_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_n = \text{Max Sp}(u).$$

- Pour  $x = e_n$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} &= \frac{\langle e_n, u(e_n) \rangle}{\|e_n\|^2} \\ &= \frac{\langle e_n, \lambda_n e_n \rangle}{\|e_n\|^2} \\ &= \lambda_n \\ &= \text{Max Sp}(u) \end{aligned}$$

Ce qui montre que le Sup étudié est un max, et qu'il vaut  $\text{Max Sp}(u)$ .

2. On suppose maintenant  $u$  autoadjoint positif. Par caractérisation spectrale, on a  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  et donc  $\text{Max Sp}(u) = \rho(u)$ .

- Pour tout  $x \in E$  non nul :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} &\leq \frac{1}{\|x\|^2} \|x\| \|u(x)\| \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\| \\ &\quad \text{par déf. de norme d'opérateur} \\ &= \|u\| \text{ indépendant de } x \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sup_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} \leq \|u\|, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\text{Max Sp}(u) \leq \|u\|$$

par le point précédent.

- Pour tout  $x \in E$  non nul, comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est

orthonormée :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle u(x), e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle u(x), e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, u(e_i) \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle x, u(e_j) \rangle e_j \right\rangle \\ &\quad \text{car } u \text{ autoadjoint} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &\quad \text{car } u(e_i) = \lambda_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &\quad \text{par bilinéarité} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle x, e_i \rangle^2 \right\rangle \\ &\quad \text{car } \mathcal{B} \text{ orthonormée} \\ &\leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \\ &= \lambda_n^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, par positivité de  $\lambda_n$ ,  $\|u(x)\| \leq \lambda_n \|x\|$ , ce qui signifie, par définition de la norme d'opérateur :

$$\|u\| \leq \lambda_n$$

c'est-à-dire :

$$\|u\| \leq \text{Max Sp}(u)$$

On a montré que :

$$\text{Max}(\text{Sp}(u)) = \rho(u) = \|u\|$$

3. Cette fois-ci, l'endomorphisme  $u$  est quelconque.

- Remarquons tout d'abord que  $u^* \circ u$  est autoadjoint positif :

$$\begin{aligned} (u^* \circ u)^* &= u^* \circ u^{**} \\ &= u^* \circ u \end{aligned}$$

et, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} \langle u^* \circ u(x), x \rangle &= \langle u(x), u(x) \rangle \\ &= \|u(x)\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- Par les deux points précédents, on a donc :

$$\begin{aligned} \|u^* \circ u\| &= \rho(u^* \circ u) \text{ par le point 2} \\ &= \text{Max Sp}(u^* \circ u) \text{ par le point 2} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, u^* \circ u(x) \rangle}{\|x\|^2} \text{ par le point 1} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\langle u(x), u(x) \rangle}{\|x\|^2} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \\ &= \|u\|^2 \\ &\quad \text{par déf. de norme d'opérateur} \end{aligned}$$

□

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Caractérisation des symétries orthogonales, des projecteurs orthogonaux

#### 320.1

Soit  $E$  espace euclidien.

Montrer que les projections orthogonales de  $E$  sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

#### 320.2

Soit  $E$  espace euclidien.

Montrer que les symétries orthogonales de  $E$  sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

### Racine carrée d'une matrice symétrique positive

#### 320.3

- (a) Montrer que, pour toute matrice  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , il existe  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que :  $S = R^2$
- (b) Montrer l'unicité de cette matrice  $R$ .

### Décomposition polaire d'une matrice inversible

#### 320.4

Montrer que toute matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  admet une **décomposition polaire** :  
 $A = \Omega S$  où  $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### Matrice de Householder

#### 320.5

Si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , on appelle **matrice de Householder** de  $V$  la matrice :  $H_V = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} VV^\top$   
 Montrer que  $H_V$  est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

### Matrice de Hilbert

#### 320.6

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert**  $H = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- (a) Pour  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , exprimer  $X^\top H X$ .
- (b) Montrer que  $H$  est une matrice symétrique, définie positive.  
*On écrira  $\frac{1}{i+j-1}$  comme l'intégrale sur  $[0, 1]$  d'un polynôme simple.*

### Une formule variationnelle

#### 320.7

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\sup_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \text{Max Sp}(u)$$

## Exercices du CCINP

**320.8**
 **63**

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ .

On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^*$  l'adjoint de  $u$ .

1. Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$  est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  - i.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .
  - ii.  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .
  - iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

**320.9**
 **66**

1. Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .  
Prouver que  $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .
2. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ .
3. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$ .
4. Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .  
Prouver qu'il existe  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .

**320.10**
 **68.2**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières :
  - (a) sans calcul,

2. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A$ .


Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

**320.11**
 **78**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

On note  $(x|y)$  le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
  - (a) Démontrer que :  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
  - (b) Démontrer que  $u$  est bijectif.
2. On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ , c'est-à-dire  $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$ .  
Démontrer que  $\mathcal{O}(E)$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .  
Prouver que :  $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

**320.12**
 **101.22**

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice  $A$  est diagonalisable.
- (b) Prouver que  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace propre associé.
- (c) Déterminer une matrice  $P$  inversible orthogonale et une matrice  $D$  diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^{-1}AP$  et  $A = PDP^T$ .

## Exercices

### 320.13

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

- (a)  $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$
- (b)  $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker } u)^\perp$

### 320.14

Dans  $E$  espace euclidien non nul et  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Montrer que :

$$\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|$$

### 320.15

Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $a$  un vecteur unitaire et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour  $x \in E$ , on pose :

$$f(x) = x + \lambda \langle x, a \rangle a$$

- (a) Montrer que  $f$  est autoadjoint.
- (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ .

### 320.16

Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.

### 320.17

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

- (a)  $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$
- (b)  $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker } u)^\perp$

### 320.18

On travaille dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base ortho-normée directe. Décrire les endomorphismes représentés par les matrices :

$$(a) \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

### 320.19

Orthodiagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

### 320.20

Étudier la transformation géométrique associée à :

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

### 320.21

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice relativement à la base canonique est  $A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Reconnaître  $u$ .

### 320.22

On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique. Soit  $A, B$  deux matrices orthogonales. Montrer que les applications :

$$M \mapsto AM, \quad M \mapsto MB, \quad M \mapsto AMB$$

sont des isométries vectorielles de  $E$ .

## Petits problèmes d'entraînement

### 320.23

Soit  $f$  une isométrie d'un espace euclidien  $E$ . On note  $\text{Id}$  l'application identique de  $E$ ,  $F = \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $G$  le sous-espace supplémentaire orthogonal de  $F$ .

- Montrer que, pour tout  $x, y \in E$ ,  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- Montrer que  $G$  est stable par  $f$ , et que la restriction de  $\text{Id} - f$  à  $G$ , notée  $g$ , est un automorphisme de  $G$ .
- On note  $g_n = \frac{1}{n} (\text{Id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$ . Exprimer l'application  $g_n \circ (\text{Id} - f)$  en fonction de  $\text{Id}$ ,  $f^n$  et  $n$ . En déduire que, pour tout  $x \in G$ ,  $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$ .
- Soit  $x \in E$ . Montrer que  $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x)$ , où  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

- On pose  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :  

$$\frac{1}{n} (I_3 + A + \dots + A^{n-1})$$

### 320.24

Soit  $n \geq 3$ ,  $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ ,  $A$  et  $B$  deux colonnes non colinéaires dans  $E$  et :

$$M = AB^\top + BA^\top$$

- Justifier que  $M$  est diagonalisable.
- Déterminer  $\text{rg}(M)$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
- Déterminer le spectre de  $M$  et décrire les sous-espaces propres associés.  
*On pourra commencer par le cas où  $(A, B)$  est une famille orthonormée.*

### 320.25

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 3$ ,  $a, b$  deux vecteurs unitaires de  $E$ , non colinéaires. Pour  $x \in E$ , on pose :

$$f(x) = \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .
- Déterminer noyau et image de  $f$ .
- Déterminer les éléments propres de  $f$ .

### 320.26

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

- Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
- Montrer que  $f : P \mapsto 2XP' - P''$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .
- Montrer que les valeurs propres de  $f$  sont positives, et les déterminer.

### 320.27

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) la plus grande valeur propre de  $A^\top A$  (resp.  $B^\top B$ ). Montrer que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(AB), \lambda^2 \leq \alpha\beta$$

### 320.28

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Justifier que  $M$  est diagonalisable et donner  $\dim \text{Ker } M$ .



(b) Donner une base de  $\text{Ker}(M)^\perp$ , et préciser la matrice de l'endomorphisme induit par  $M$  sur  $\text{Ker}(M)^\perp$  dans cette base.

(c) En déduire le spectre de  $M$ .

### 320.29

Soit  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique satisfaisant :

$$A^{17} = A^{19}$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{rg}(A)$$

### 320.30

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$  et calculer  $\text{rg}(A)$ .

### 320.31

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ .

(a) Soit  $u : P \mapsto \int_0^1 (X+t)^n P(t)dt$  : montrer que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

(b) En déduire qu'il existe une base orthonormée  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . On note  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  les vp associées.

(c) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)P_k(y)$$

En déduire  $\text{tr}(u)$ .