Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Cours 2

Exercices 13

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, E est un espace euclidien et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est son produit scalaire.

1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

1.1 Définition, matrice de l'adjoint en base orthonormée

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

L'endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\operatorname{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B})^\top$$

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Corollaire. u et u^* ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même spectre.

Remarque. *En revanche, ils n'ont pas pas les mêmes vecteurs propres.*

1.2 Propriétés

Proposition. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$
- $(u^*)^* = u$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- Si u est bijectif, u^* aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

2.1 Définition, matrice en base orthonormée

Définition. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** lorsque $u^* = u$, i.e. :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque. *On qualifie parfois les endomorphismes autoadjoints (i.e. $u^* = u$) de symétriques, mais on évitera cette terminologie, car il n'y a aucune raison que ça soit une symétrie (i.e. $u \circ u = \mathrm{Id}_E$).*

Proposition. Soit u endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Proposition. Soit E espace euclidien de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Fixons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

c'est-à-dire que u est autoadjoint si et seulement si sa matrice en base orthonormée est symétrique.

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Corollaire. La dimension de $\mathcal{S}(E)$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2 Porjecteurs orthogonaux

Proposition. Soit p un projecteur (i.e. $p \circ p = p$). Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement si p est autoadjoint.

2.3 Le théorème spectral

Théorème spectral - version endomorphisme.

Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}(E) &\iff E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u) \\ &\iff \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée } \text{ t.q. } \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ diagonale} \end{aligned}$$

Remarque.

- *On dit parfois que tout endomorphisme autoadjoint d'une espace euclidien est orthodiagonalisable.*
- *On note bien que les espaces propres des endomorphismes autoadjoints sont orthogonaux.*

Théorème spectral matriciel.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff A \text{ est orthogonalement diagonalisable}$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$A = PDP^\top$$

où D est une matrice diagonale et P une matrice orthogonale, c'est-à-dire une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Remarque. *L'étude des matrices orthogonale est menée au § 4. On y montre que les matrices orthgonales sont les matrices de passage entre bases orthonormées, et qu'on les inverse en transposant.*

2.4 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit qu'il est **positif** lorsque :

$$\forall x \in E,\ \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0$$

On dit qu'il est **défini positif** lorsque :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \langle x, u(x) \rangle > 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs).

Remarque.

- *Pour montrer que u est défini positif, on peut aussi montrer :*

$$\forall x \in E,\ \begin{cases} \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0 \\ \langle x, u(x) \rangle = 0 \implies x = 0 \end{cases}$$

- *On ne qualifie un endomorphisme de positif que s'il est déjà autoadjoint.*
- *$\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).*

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit qu'elle est **positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0$$

On dit qu'elle est **définie positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top AX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Remarque.

- *Pour montrer que A est définie positive, on peut aussi montrer :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ \begin{cases} X^\top AX \geqslant 0 \\ X^\top AX = 0 \implies X = 0 \end{cases}$$

- *On ne qualifie une matrice de positive que si elle est déjà symétrique.*
- *$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).*

Caractérisation spectrale - version endomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors :

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

Caractérisation spectrale - version matricielle.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

3 Isométries d'un espace euclidien

3.1 Définition

Définition. Soit u un endomorphisme de E. On l'appelle **isométrie vectorielle** lorsqu'elle conserve les normes :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

Remarque. *On trouve aussi, dans la littérature, la terminologie automorphisme orthogonal.*

Exemple. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
Les projecteurs orthogonaux ne sont pas, en général, des isométries vectorielles.

3.2 Caractérisations

Proposition. l'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Proposition. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.

Proposition. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si :

$$u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$$

ou encore, c'est équivalent, $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ sont les automorphismes de E dont l'inverse est l'adjoint.

3.3 Propriétés

Proposition. Toute isométrie vectorielle est bijective : c'est un automorphisme de E.

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\det(u) = \pm 1$

Remarque. *Attention ! la réciproque est bien-sûr fausse.*

3.4 Le groupe $\mathrm{O}(E)$

Proposition. $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. On appelle $\mathrm{O}(E)$ le **groupe orthogonal de** E.

Définition. On note $\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E),\ \det(u) = 1\}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé le **groupe spécial orthogonal**.
Ses éléments sont les isométries vectorielles **directes**.
Les éléments de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ sont les isométries vectorielles **indirectes**.

4 Matrices orthogonales

4.1 Définition

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si et seulement si :

$$AA^\top = I_n$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou parfois $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2 Caractérisations

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(i) A est une matrice orthogonale ;

(ii) $A^\top A = I_n$, i.e. les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$;

(iii) A est inversible et $A^{-1} = M^\top$;

(iv) $AA^\top = I_n$, i.e. les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$;

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors :

$$u \in \mathrm{O}(E) \iff \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée } \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4.3 Propriétés

Proposition. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A est inversible, et $A^{-1} = A^\top$
- $\det A = \pm 1$

4.4 Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Proposition. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. On appelle $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal d'ordre** n.

Définition. On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\}$ (parfois aussi noté $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$). C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, appelé le **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.
Ses éléments sont les matrices orthogonales **directes** (ou **positives**).
Les éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales **indirectes** (ou **négatives**).

5 Orientation

5.1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Fixons E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Remarque. *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on sait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est un réel non nul.*
$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ désigne le déterminant de la famille des vecteurs de $\mathcal{B}'$, exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Définition. On dit que $\mathcal{B}$ a la même orientation que $\mathcal{B}'$ lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Proposition. « a la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Il y a exactement deux classes d'équivalences.

Définition. **Orienter** E, c'est faire le choix de l'une des deux classes d'équivalence pour la relation « a la même orientation ». On fait en général ce choix à travers le choix d'une base particulière, un représentant de la classe choisie. Les bases de cette classe sont dites **directes**, les autres **indirectes**.

Exemple. En général, on oriente $\mathbb{R}^n$ en choisissant la base canonique directe.

5.2 Orientation d'un hyperplan

Définition. Soit E un espace euclidien orienté, et H un hyperplan de E. On oriente H par le choix d'un vecteur normal a : une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H est **directe** lorsque $\left(e_1, \dots, e_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right)$ est une base directe de E.

5.3 Espace euclidien orienté, produit mixte

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté et $x_1, \dots, x_n \in E$.
Le déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans toutes les bases orthonormales directes de E. On peut donc noter :

$$\det(x_1, \dots, x_n)$$

pour désigner $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée quelconque de E.

Remarque. *On trouve aussi la notation $[x_1, \dots, x_n]$, et l'appelation produit mixte.*

Remarque. *On peut reformuler le résultat précédent en disant que, pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E :*

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

Proposition. Dans le même contexte, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$:

$$[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)] = \det(u) \times [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

6 Étude des isométries vectorielles

6.1 Isométries vectorielles en dimension 2

6.1.1 Étude des isométries vectorielles directes

Théorème.

Soit $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Corollaire.

- L'application : $\begin{array}{rccl} R : & \mathbb{R} & \to & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ & \theta & \mapsto & R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
- L'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$ est correctement définie, et est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Corollaire. $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

Remarque. *C'est une propriété tout à fait spécifique à la dimension* 2.

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Si $u \in \mathrm{SO}(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que la matrice de u soit, dans n'importe quelle base orthonormée directe de E :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Définition. On dit que u est la **rotation vectorielle d'angle orienté** θ.

6.1.2 Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls

Définition. Si x, y sont deux vecteurs unitaires de E un espace euclidien orienté de dimension 2, alors il existe une unique rotation $u \in \mathrm{SO}(E)$ telle que $y = u(x)$.
Si x, y deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté** (x, y) tout réel θ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.
On a les relations :

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \, \cos\theta \quad \text{et} \quad [x, y] = \|x\| \, \|y\| \, \sin\theta$$

6.1.3 Étude des isométries vectorielles indirectes

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.

- u est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et u est la réflexion par rapport à la droite dirigée par $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

6.2 Réduction des isométries en dimension n

Lemme. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$

- Si F un sous-espace stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.
- Il y a au moins un plan ou une droite stable par u.
- Les seules valeurs propres (réelles) possibles pour u sont 1 et -1.

Théorème.

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, des entiers m, p, q et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_m$ tels que, par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

Remarque. *Si $u \in \mathrm{SO}(E)$, alors l'entier p est pair.*

Version matricielle. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et Q de la forme ci-dessus telles que :

$$M = PQP^{-1} = PQP^{\top}$$

6.3 Cas particulier de la dimension 3

Proposition. Soit E un espace euclidien de dimension 3, $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque.

- *Contrairement au cas de la dimension 2, la forme de la matrice de u dépend fortement de la base choisie.*
- *Si l'on écarte le cas où $u = \mathrm{Id}_E$, on constate que $\mathrm{Vect}(e_3)$ est la droite des vecteurs invariants par u. $F = \mathrm{Vect}(e_3)^{\perp}$, orienté par e_3, est stable par u, et l'endomorphisme induit u_F est une rotation vectorielle d'angle θ.*
  *On dit que u est **la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3 et d'angle θ**.*
- *Le programme officiel indique que « la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme ».*
- *On doit néanmoins savoir trouver l'axe d'une rotation (c'est $E_1(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$), et dire que l'angle vérifie $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}(u)$, ce qui donne l'angle au signe près.*

7 Annexes

7.1 Annexe : l'adjoint est un endomorphisme

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

L'endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u.

Preuve.

- Tout d'abord, pour tout $y \in E$ fixé, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de u, $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme linéaire. Alors, par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique vecteur a tel que :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, a\rangle$$

et on peut noter $u^*(y)$ ce vecteur a.
On a montré que u^* est bien défini, et à valeurs dans E.

- Montrons maintenant la linéarité de u^*.
Soit $y_1, y_2 \in E$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
&\langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)\rangle \\
&= \langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle - \alpha_1 \langle x, u^*(y_1)\rangle - \alpha_2 \langle x, u^*(y_2)\rangle \\
&\qquad \text{par bilinéarité} \\
&= \langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle - \alpha_1 \langle u(x), y_1\rangle - \alpha_2 \langle u(x), y_2\rangle \\
&\qquad \text{par définition de } u^* \\
&= \langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2\rangle \\
&\qquad \text{par bilinéarité} \\
&= \langle u(x), 0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)$ est orthogonal à tout vecteur de E, c'est donc le vecteur nul :

$$u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 u^*(y_1) + \alpha_2 u^*(y_2)$$

□

7.2 Annexe : démonstration du théorème spectral

Lemme 1. Soit E espace euclidien de dimension $\geqslant 1$, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.

Remarque. *Il s'agit bien du spectre de u en tant qu'endomorphisme de E, donc des valeurs propres réelles de u.*

Preuve.

- Notons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $S = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ la matrice (symétrique réelle) de u dans $\mathcal{B}$. Le polynôme caractéristique χ_S est scindé dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de S vue comme matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$SZ = \lambda Z$$

On a alors, d'une part :

$$\begin{aligned}
\overline{Z}^\top SZ &= \overline{Z}^\top \lambda Z \\
&= \lambda \overline{Z}^\top Z \\
&= \lambda(\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n) \\
&= \lambda(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\overline{Z}^\top SZ &= \overline{Z}^\top \overline{S} Z \text{ car } S \text{ est réelle} \\
&= \overline{SZ}^\top Z \\
&= \overline{\lambda Z}^\top Z \\
&= \overline{\lambda}(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)
\end{aligned}$$

Comme $Z \neq 0$, on a $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \overline{\lambda}$: $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Remarque. *On a même montré que toutes les valeurs propres de S sont réelles.*

Lemme 2. Soit E espace euclidien de dimension $\geqslant 1$, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors u est diagonalisable.

Preuve. On raisonne par récurrence forte sur la dimension de E.

- Si E est de dimension 1, u est bien-sûr diagonalisable.
- Soit $n \geqslant 2$, on suppose que le résultat est vrai dans tout espace euclidien de dimension $\leqslant n-1$. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$.
D'après le lemme 1, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de u. L'espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u et u est autoadjoint, donc l'orthogonal $F = E_\lambda(u)^\perp$ est aussi stable par u.
E étant de dimension finie, $\dim(F) = n - \dim(E_\lambda(u)) \leqslant n-1$. On applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit u_F, qui est bien autoadjoint puisque u l'est. Ainsi u_F est diagonalisable.
Mais $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$ est aussi diagonalisable et $E = F \oplus E_\lambda(u)$ donc u est diagonalisable.
- On a montré le résultat, par récurrence.

□

Lemme 3. Soit E espace euclidien, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Soit λ, μ deux valeurs propres (réelles) distinctes de u. Alors $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.

Preuve. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$.
On calcule d'une part :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle \\
&= \lambda \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \langle x, u(y)\rangle \text{ car } u \text{ autoadjoint} \\
&= \langle x, \mu y\rangle \\
&= \mu \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, c'est que $\langle x, y\rangle = 0$. □

Théorème.

Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned}
u \in \mathcal{S}(E) &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{\perp} E_\lambda(u) \\
&\iff \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée} \\
&\qquad \text{t.q. } \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ diagonale}
\end{aligned}$$

Preuve. Notons (i), (ii) et (iii) ces trois propriétés.

$\boxed{(i) \implies (ii)}$
Par le lemme 2, on a déjà $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Par le lemme 3, les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Le résultat est donc acquis.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. On considère, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\mathcal{B}_i$ une base orthonormée de $E_{\lambda_i}(u)$. Notons alors $\mathcal{B}$ la concaténation $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$. Comme $E = \bigoplus^{\perp}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et on a, par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$
Notant $S = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$, on a $S^\top = S$ car S est diagonale, et donc $u^* = u$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée.

□

7.3 Annexe : une autre démonstration du théorème spectral

Lemme 1. Soit E espace euclidien de dimension $\geqslant 1$, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.

Preuve. On note $\phi : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$.

- Comme u est linéaire en dimension finie, elle est continue. Le produit scalaire étant continu, ϕ est continue. Sur la sphère unité $S = S(0,1)$, fermée bornée en dimension finie, donc compacte, ϕ admet donc un maximum atteint en x_0 :

$$\exists x_0 \in S,\ \forall x \in S,\ \phi(x) \leqslant \phi(x_0)$$

  Notons $H = \mathrm{Vect}(x_0)^\perp$, et fixons $y \in H$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$\psi(t) = \phi\big((\cos t)x_0 + (\sin t)y\big)$$

  Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \phi\big((\cos t)x_0 + (\sin t)y\big) \\ &\leqslant \phi(x_0) \text{ par définition du max} \\ &= \psi(0) \end{aligned}$$

  donc la fonction réelle de variable réelle ψ admet un maximum en 0.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \langle u\big((\cos t)x_0 + (\sin t)y\big), (\cos t)x_0 + (\sin t)y \rangle \\ &= (\cos^2 t)\phi(x_0) + (\sin t)^2\phi(y) + (\cos t \sin t)\langle u(x_0), y\rangle \\ &\qquad + (\cos t \sin t)\langle u(y), x_0\rangle \\ &\qquad \text{par linéarité de } u \text{ et bilinéarité du p.s.} \\ &= (\cos^2 t)\phi(x_0) + (\sin t)^2\phi(y) + (\sin 2t)\langle u(x_0), y\rangle \\ &\qquad \text{car } u \text{ autoadjoint} \end{aligned}$$

  puis :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (-2\sin t \cos t)\phi(x_0) + (2\cos t \sin t)\phi(y) \\ &\qquad + (2\cos 2t)\langle u(x_0), y\rangle \end{aligned}$$

  Comme ψ admet un maximum en $t = 0$, c'est que :

$$\langle u(x_0), y\rangle = 0$$

- On a montré que, pour tout $y \in H$, $\langle u(x_0), y\rangle = 0$. Ainsi $u(x_0) \in H^\perp$. Mais $H = \mathrm{Vect}(x_0)$, donc :

$$u(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0)$$

  Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. On a montré que x_0 est vecteur propre de u, et trouvé λ une valeur propre de u.

□

7.4 Complément : une autre démonstration du théorème spectral

Lemme 0. Soit F un espace euclidien, $v \in \mathcal{S}(F)$ un endomorphisme autoadjoint de F. Soit

$$Q = (X - \alpha)^2 + \beta \in \mathbb{R}[X]$$

où $\beta > 0$, un polynôme irréductible, écrit sous sa forme canonique.
Alors $Q(v)$ est autoadjoint, défini-positif.

Preuve.

- Le polynôme d'endomorphisme est :

$$Q(v) = (v - \alpha \mathrm{Id}_F)^2 + \beta \mathrm{Id}_F$$

  donc

$$\begin{aligned} \big(Q(v)\big)^* &= \big((v - \alpha\mathrm{Id}_F)^2 + \beta\mathrm{Id}_F\big)^* \\ &= (v^* - \alpha\mathrm{Id}_F^*)^2 + \beta\mathrm{Id}_F^* \\ &= (v - \alpha\mathrm{Id}_F)^2 + \beta\mathrm{Id}_F \\ &\qquad \text{car } v \text{ et } \mathrm{Id}_F \text{ autoadjoints} \\ &= Q(v) \end{aligned}$$

  Ainsi $Q(v)$ est autoadjoint.

- Pour $x \in E$, on calcule :

$$\begin{aligned} &\langle Q(v)(x), x\rangle \\ &= \langle \big((v - \alpha\mathrm{Id}_F)^2 + \beta\mathrm{Id}_F\big)(x), x\rangle \\ &= \langle \big((v - \alpha\mathrm{Id}_F) \circ (v - \alpha\mathrm{Id}_F)\big)(x), x\rangle + \beta\langle x, x\rangle \\ &= \langle (v - \alpha\mathrm{Id}_F)(x), (v - \alpha\mathrm{Id}_F)(x)\rangle + \beta\langle x, x\rangle \\ &\qquad \text{car } v - \alpha\mathrm{Id}_F \text{ autoadjoint} \\ &= \|(v - \alpha\mathrm{Id}_F)(x)\|^2 + \beta\|x\|^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi $Q(v)$ est autoadjoint positif.

- Soit $x \in E$ tel que $\langle Q(v)(x), x\rangle = 0$. C'est donc que $\|(v - \alpha\mathrm{Id}_F)(x)\|^2 + \beta\|x\|^2 = 0$ par le calcul précédent. Il s'agit d'une somme nulle de termes positifs, donc $\beta\|x\|^2 = 0$ et donc $\|x\| = 0$ car $\beta > 0$. Ainsi $x = 0$.
  Finalement, on a montré que $Q(v)$ est autoadjoint défini positif.

□

Lemme 1. Soit E espace euclidien de dimension $\geqslant 1$, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.

Preuve. Intéressons-nous à la décomposition en produit de polynômes irréductibles du polynôme minimal π_u de u. Supposons que cette décomposition comprenne un termes irréductibles de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe Q et P tels que :

$$\pi_u = QP$$

où $Q = (X-\alpha)^2 + \beta$ avec $\beta > 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{L}(E)} &= \pi_u(u) \\ &= Q(u) \circ P(u) \end{aligned}$$

Notons $F = \mathrm{Im}(P(u))$. Comme u et $P(u)$ commutent, F est stable par u. On note $v = u_F$ l'endomorphisme induit par u sur F. L'égalité précédente s'écrit :

$$\forall x \in E,\ Q(u)(P(u)(x)) = 0$$

et donc, comme chaque $y \in F$ s'écrit $P(u)(x)$,

$$\forall y \in F,\ Q(v)(y) = 0$$

Mais le lemme 0 indique que $Q(v)$ est autoadjoint défini positif, donc pour tout $y \in F$, si $y \neq 0$, alors $\langle \underbrace{Q(v)(y)}_{=0}, y\rangle > 0$.

C'est donc que tout $y \in F = \mathrm{Im}(P(u))$ est nul, et donc que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Ceci contredit la minimalité de π_u. C'est donc que π_u n'a pas de facteur irréductible de degré 2, donc est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui justifie la propriété annoncée. □

7.5 Annexe : normes subordonnées et rayons spectraux

On considère E un espace euclidien, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et $|||\cdot|||$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$, subordonnée à $\|\cdot\|$.

Lemme. Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \operatorname*{Sup}_{\|y\| \leqslant 1} \langle x, y\rangle$$

Preuve.

- Pour tout y tel que $\|y\| \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &\leqslant \|x\|\|y\| && \text{Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant \|x\| && \text{indépendant de } y \end{aligned}$$

  donc $\operatorname*{Sup}_{\|y\| \leqslant 1} \langle x, y\rangle \leqslant \|x\|$.
- Le cas où $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ fournit un cas d'égalité dans l'inégalité précédente, donc :

$$\operatorname*{Sup}_{\|y\| \leqslant 1} \langle x, y\rangle = \|x\|$$

□

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u^*||| = |||u|||$.

Preuve. Si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $u^* = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et l'égalité est triviale. On suppose dorénavant $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x)\rangle \\ &= \langle u^*(u(x)), x\rangle \text{ par définition de l'adjoint} \\ &\leqslant \|u^* \circ u(x)\|\ \|x\| \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant |||u^* \circ u|||\ \|x\|\ \|x\| \text{ par déf. de } |||\cdot||| \\ &\leqslant |||u^*|||\ |||u|||\ \|x\|^2 \text{ par sous-multiplicativité} \end{aligned}$$

  que l'on peut réécrire :

$$\|u(x)\| \leqslant \sqrt{|||u^*|||\ |||u|||}\ \|x\|$$

  On a donc, par définition de la norme d'opérateur :

$$|||u||| \leqslant \sqrt{|||u^*|||\ |||u|||}$$

  et donc, comme $|||u||| \neq 0$:

$$\sqrt{|||u|||} \leqslant \sqrt{|||u^*|||}$$

  c'est-à-dire, en élevant au carré :

$$|||u||| \leqslant |||u^*|||$$

- En appliquant ce qui précède à u^*, on a aussi :

$$\begin{aligned} |||u^*||| &\leqslant |||u^{**}||| \\ &= |||u||| \text{ car } u^{**} = u \end{aligned}$$

On a montré que $|||u||| = |||u^*|||$.

□

Définition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le **rayon spectral** :

$$\rho(u) = \mathrm{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Proposition. On dispose des résultat suivants :

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Max}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2}$$

2. Si de plus $u \in \mathcal{S}^+(E)$,

$$\mathrm{Max}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \rho(u) = |||u|||$$

3. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$$

Preuve.

1. Notons $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u, classées par ordre croissant, répétées selon leurs mulitiplicités. Comme u est autoadjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   Rappelons qu'en base orthonormée, les coordonnées de x sont $(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$.

- Pour tout $x \in E$ non nul :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} &= \frac{1}{\|x\|^2}\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i, u\big(\sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j\big)\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle\langle e_i, u(e_j)\rangle \\
&\qquad \text{par linéarité de } u \\
&\qquad \text{et bilinéarité du p.s.} \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle\langle e_i, \lambda_j e_j\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2\lambda_i \quad \text{car } \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \\
&\leqslant \frac{1}{\|x\|^2}\lambda_n \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 \\
&= \lambda_n \text{ indépendant de } x
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n = \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$.

- Pour $x = e_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} &= \frac{\langle e_n, u(e_n)\rangle}{\|e_n\|^2} \\
&= \frac{\langle e_n, \lambda_n e_n\rangle}{\|e_n\|^2} \\
&= \lambda_n \\
&= \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le Sup étudié est un max, et qu'il vaut $\operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$.

2. On suppose maintenant u autoadjoint positif. Par caractérisation spectrale, on a $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et donc $\operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u) = \rho(u)$.

- Pour tout $x \in E$ non nul :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} &\leqslant \frac{1}{\|x\|^2}\|x\|\,\|u(x)\| \text{ Cauchy-Schwarz} \\
&\frac{1}{\|x\|}\,|||u|||\,\|x\| \\
&\qquad \text{par déf. de norme d'opérateur} \\
&= |||u||| \quad \text{indépendant de } x
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \leqslant |||u|||$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u) \leqslant |||u|||$$

par le point précédent.

- Pour tout $x \in E$ non nul, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée :

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^n \langle u(x), e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle u(x), e_j\rangle e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^n \langle x, u(e_i)\rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle x, u(e_j)\rangle e_j\rangle \\
&\qquad \text{car } u \text{ autoadjoint} \\
&= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x, e_j\rangle e_j\rangle \\
&\qquad \text{car } u(e_i) = \lambda_i e_i \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\
&\qquad \text{par bilinéarité} \\
&= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\langle x, e_i\rangle^2 \\
&\qquad \text{car } \mathcal{B} \text{ orthonormée} \\
&\leqslant \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 \\
&= \lambda_n^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi, par positivité de λ_n, $\|u(x)\| \leqslant \lambda_n\|x\|$, ce qui signifie, par définition de la norme d'opérateur :

$$|||u||| \leqslant \lambda_n$$

c'est-à-dire :

$$|||u||| \leqslant \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$$

On a montré que :

$$\operatorname{Max}\big(\operatorname{Sp}(u)\big) = \rho(u) = |||u|||$$

3. Cette fois-ci, l'endomorphisme u est quelconque.

- Remarquons tout d'abord que $u^\star \circ u$ est autoadjoint positif :

$$\begin{aligned}
(u^\star \circ u)^\star &= u^\star \circ u^{\star\star} \\
&= u^\star \circ u
\end{aligned}$$

et, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
\langle u^\star \circ u(x), x\rangle &= \langle u(x), u(x)\rangle \\
&= \|u(x)\|^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

- Par les deux points précédents, on a donc :

$$\begin{aligned}
|||u^\star \circ u||| &= \rho(u^\star \circ u) \text{ par le point 2} \\
&= \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u^\star \circ u) \text{ par le point 2} \\
&= \operatorname*{Sup}_{x\neq 0} \frac{\langle x, u^\star \circ u(x)\rangle}{\|x\|^2} \text{ par le point 1} \\
&= \operatorname*{Sup}_{x\neq 0} \frac{\langle u(x), u(x)\rangle}{\|x\|^2} \\
&= \operatorname*{Sup}_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \\
&= |||u|||^2 \\
&\qquad \text{par déf. de norme d'opérateur}
\end{aligned}$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Caractérisation des symétries orthogonales, des projecteurs orthogonaux

320.1

Soit E espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de E sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

320.2

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

320.3

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $S = R^2$

(b) Montrer l'unicité de cette matrice R.

Décomposition polaire d'une matrice inversible

320.4

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :
$A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Matrice de Householder

320.5

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de V la matrice : $H_V = I_n - \dfrac{2}{\|V\|^2} VV^\top$
Montrer que H_V est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

Matrice de Hilbert

320.6

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top HX$.

(b) Montrer que H est une matrice symétrique, définie positive.
On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.

Une formule variationnelle

320.7

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$$

Exercices du CCINP

320.8 CCINP 63

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

320.9 CCINP 66

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

320.10 CCINP 68.2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable ~~de quatre manières~~ :

   (a) sans calcul,

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

320.11 CCINP 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

   (b) Démontrer que u est bijectif.

2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E,
c'est-à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

320.12 CCINP 101.22

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

   (c) Déterminer une matrice P ~~inversible~~ *orthogonale* et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\cancel{D = P^{-1}AP}$ $A = PDP^\top$.

Exercices

320.13

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(a) $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

(b) $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

320.14

Dans E espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

320.15

Soit E espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $x \in E$, on pose :

$$f(x) = x + \lambda \langle x, a \rangle a$$

(a) Montrer que f est autoadjoint.

(b) Déterminer les éléments propres de f.

320.16

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

320.17

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(a) $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

(b) $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

320.18

On travaille dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe. Décrire les endomorphismes représentés par les matrices :

(a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

320.19

Orthodiagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

320.20

Étudier la transformation géométrique associée à :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

320.21

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement à la base canonique est $A = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Reconnaître u.

320.22

On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit A, B deux matrices orthgonales. Montrer que les applications :

$$M \mapsto AM, \quad M \mapsto MB, \quad M \mapsto AMB$$

sont des isométries vectoerielles de E.

Petits problèmes d'entrainement

320.23 ✍

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E. On note Id l'application identique de E, $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et G le sous-espace supplémentaire orthogonal de F.

(a) Montrer que, pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(b) Montrer que G est stable par f, et que la restriction de $\mathrm{Id} - f$ à G, notée g, est un automorphisme de G.

(c) On note $g_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$. Exprimer l'application $g_n \circ (\mathrm{Id} - f)$ en fonction de Id, f^n et n. En déduire que, pour tout $x \in G$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.

(d) Soit $x \in E$. Montrer que $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$, où p est la projection orthogonale sur F.

(e) On pose $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\frac{1}{n}(I_3 + A + \cdots + A^{n-1})$$

320.24 ✍

Soit $n \geqslant 3$, $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, A et B deux colonnes non colinéaires dans E et :

$$M = AB^\top + BA^\top$$

(a) Justifier que M est diagonalisable.

(b) Déterminer $\mathrm{rg}(M)$ en fonction de A et B.

(c) Déterminer le spectre de M et décrire les sous-espaces propres associés. *On pourra commencer par le cas où (A, B) est une famille orthonormée.*

320.25

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$, a, b deux vecteurs unitaires de E, non colinéaires. Pour $x \in E$, on pose :

$$f(x) = \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

(b) Déterminer noyau et image de f.

(c) Déterminer les éléments propres de f.

320.26

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

(b) Montrer que $f : P \mapsto 2XP' - P''$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

(c) Montrer que les valeurs propres de f sont positives, et les déterminer.

320.27

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note α (resp. β) la plus grande valeur propre de $A^\top A$ (resp. $B^\top B$). Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(AB),\ \lambda^2 \leqslant \alpha\beta$$

320.28

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que M est diagonalisable et donner $\dim \mathrm{Ker}\, M$.

(b) Donner une base de $\mathrm{Ker}(M)^\perp$, et préciser la matrice de l'endomorphisme induit par M sur $\mathrm{Ker}(M)^\perp$ dans cette base.

(c) En déduire le spectre de M.

320.29

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique satisfaisant :

$$A^{17} = A^{19}$$

Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \mathrm{rg}(A)$$

320.30

Soit $A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et calculer $\mathrm{rg}(A)$.

320.31

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Soit $u\ :\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 (X+t)^n P(t)\mathrm{d}t$: montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

(b) En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. On note $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les vp associées.

(c) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

En déduire $\mathrm{tr}(u)$.

320.32

Soit E espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $x \in E$, on pose :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E, à valeurs propres strictement positives.

(b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que $g^2 = f^{-1}$.

(c) Montrer que la famille $\big(g(e_1), \dots, g(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

320.33

Montrer que S_n^+, S_n^{++} sont stables par l'addition et convexes. Sont-ils stables par $\times$? Sont-ils des espaces vectoriels ?

320.34

Soient A, B deux matrices symétriques positives.

(a) Si A est définie positive, montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que $A = P^\top P$ et $B = P^\top D P$.

(b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer $\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha}$.