Espace vectoriel normé

Cours 2

1 Normes . . . 2
- 1.1 Définitions . . . 2
- 1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire . . . 3
- 1.3 Les normes usuelles . . . 3
- 1.4 Boules . . . 4
- 1.5 Parties bornées . . . 4
- 1.6 Espace vectoriel normé produit . . . 5

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . 5
- 2.1 Convergence, divergence . . . 5
- 2.2 Suites bornées . . . 5
- 2.3 Opérations sur les suites convergentes . . . 6
- 2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit . . . 6

3 Comparaison des normes . . . 6
- 3.1 Normes équivalentes . . . 6
- 3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence . . . 7
- 3.3 Comparer deux normes . . . 7

4 Annexes . . . 7
- 4.1 Annexe : des espaces normés de suites . . . 7

Exercices 8

Exercices et résultats classiques à connaître . . . 8
- La norme infinie est une norme . . . 8
- Les boules sont convexes . . . 8
- Une convergence qui dépend du choix de la norme . . . 8

Exercices du CCINP . . . 9

Exercices . . . 9

Petits problèmes d'entrainement . . . 10

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, éventuellement muni d'une norme $\|\cdot\|$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Normes

1.1 Définitions

Définition. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** sur E si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé espace vectoriel normé.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur **unitaire**. Lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire, de même direction et même sens que x.*

Exemple. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \int_0^{+\infty} |P(t)| \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Définition. On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|y - x\| \end{array}$$

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x + y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme sur E induit une norme sur F.

Définition. Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** la quantité :

$$d(x, A) = \mathrm{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\}$$

Remarque. *Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$, mais on verra que la réciproque est fausse en général.*

1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.3 Les normes usuelles

1.3.1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$

Définition. Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie**.

Théorème.

$\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

1.3.2 Normes usuelles sur l'ensemble des matrices

Exemple. Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|, \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(M^\top M\right)}, \qquad \|M\|_\infty = \operatorname*{Max}_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

1.3.3 Normes usuelles sur l'espace des polynômes

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \operatorname*{Max}_{i \in \{0, \ldots, n\}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur E.

1.3.4 Normes usuelles sur les espaces de fonctions

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E.

Lemme. Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$:

$$\operatorname{Sup}\{kx, \ x \in A\} = k \operatorname{Sup}(A)$$

Remarque. *Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des* Sup. *On travaille sur le « supande ».*

Définition. Pour X ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M$$

Théorème.

> $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :
>
> $$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$$

Remarque. *Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.*

1.4 Boules

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit :

- la **boule ouverte de centre** x **et de rayon** $r > 0$:

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}$$

- la **boule fermée de centre** x **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$BF(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leqslant r\}$$

- la **sphère de centre** x **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$S(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) = r\}$$

Remarque. *Un singleton est une boule fermée.*

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de ses normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est **convexe** si et seulement si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in A$$

Proposition. Toute boule B est une **partie convexe** de E.

1.5 Parties bornées

Définition. Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$$

Proposition.

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

Remarque. *Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.*

Exemple. Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

Remarque. *Montrer qu'une partie A est bornée, c'est majorer la norme de ses éléments x par une quantité indépendante de x.*

Exemple. On considère l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, muni des deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant k \leqslant d}{\operatorname{Max}} |a_k|$$

Que dire de l'ensemble A des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ?

Méthode. *Pour montrer que A n'est pas bornée, on exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Remarque. *Dire qu'une fonction (resp. une suite) à valeurs dans E est bornée, c'est dire que l'ensemble de ses valeurs est borné.*

1.6 Espace vectoriel normé produit

Définition. On considère p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) sur le corps $\mathbb{K}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, on définit :

$$N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\operatorname{Max}} N_i(x)$$

Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, et $(E_1 \times \cdots \times E_p, N)$ s'appelle **l'espace vectoriel normé produit des $\big((E_i, N_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$**.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

2.1 Convergence, divergence

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.

Proposition. En cas de convergence, ℓ est unique et s'appelle **la limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque. *On trouve aussi la notation $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que l'on évitera d'utiliser.*

Remarque. *Dans un e.v.n. autre que $\mathbb{R}$, ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.*

La proposition qui suit est immédiate :

Proposition. La suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

Exemple. Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n \sin \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n \,:\, t \mapsto t^n$.

2.2 Suites bornées

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.
La réciproque est bien sûr fausse.

2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit

Définition. Soit E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le p-uplet des coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **k-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout k, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

Exemple. Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \left(x_n^1, \dots, x_n^p\right)$$

où les suites $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites composantes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\},\ x_n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

3 Comparaison des normes

3.1 Normes équivalentes

Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque. *Cela revient à dire qu'il existe $\beta, \gamma > 0$ tels que :*

$$N_2 \leqslant \beta N_1 \text{ et } N_1 \leqslant \gamma N_2$$

Remarque. *C'est une relation d'équivalence.*

Exemple. Dans $\mathbb{K}^p$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème (spoiler).

> Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence

Proposition. Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors :

- $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement A est bornée pour N_2
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour N_2.

3.3 Comparer deux normes

Méthode. *Comparer N_1 et N_2, c'est regarder s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et regarder s'il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.*

- *Pour montrer l'existence de α :*
  - *Si E est de dimension finie, on affirme l'existence de α (sans connaître sa valeur)*
  - *Sinon, on part de $N_1(x)$ que l'on cherche à majorer en faisant apparaître $N_2(x)$. Une valeur possible du coefficient α devrait apparaître.*
- *Pour montrer qu'un tel α n'existe pas, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que, par exemple, $N_1(x_n)$ soit constante et $N_2(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ou alors telle que $N_1(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ tandis que $N_2(x_n)$ reste constante.*
  Si $E = \mathbb{K}[X]$, la suite ne peut pas rester dans un sous-espace de dimension fini $\mathbb{K}_p[X]$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que les deux normes N_1 et N_2 précédentes ne sont pas équivalentes.

4 Annexes

4.1 Annexe : des espaces normés de suites

On doit pouvoir démontrer les résultats suivants :

Proposition. On note $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Proposition. On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Proposition. On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de carré sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Exercices et résultats classiques à connaître

La norme infinie est une norme

42.1

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions numériques bornées sur $[0,1]$. Montrer qu'en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} (|f(t)|)$$

on définit une norme sur E.

Les boules sont convexes

42.2

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de E est convexe.

Une convergence qui dépend du choix de la norme

42.3

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n \,:\, t \mapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in]1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ et vérifier que, pour la norme N, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$. Qu'en conclure ?

Exercices du CCINP

42.4 CCINP 1.1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

42.5 CCINP 37.12

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\ f \in E,\ N_\infty(f) = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

42.6 CCINP 54.21

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ ||u|| = \underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{Sup}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\ .\ ||$ est une norme sur E.

42.7 CCINP 61.1

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}{\operatorname{Max}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercices

42.8

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, et N l'application définie par :

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

À quelle(s) condition(s) sur $a_1, \dots, a_n$ l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$.

42.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} |P(t)|$$

42.10

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B,\ N(AB) \leqslant cN(A)\,N(B)$$

42.11

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$N(x,y) = \operatorname{Max}(|x|, |x+y|)$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.

(c) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x,y) \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \text{ et } \|(x,y)\|_\infty \leqslant 2N(x,y)$$

Petits problèmes d'entrainement

42.12 ✍

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et $N\infty$ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_\infty(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) Démontrer que N_1 et N_∞ définissent deux normes sur E.

(b) Étudier, pour chacune de ces normes, la convergence de la suite $(P_n)_n$ où $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$.

(c) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

42.13 ✍

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

(a) Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.

(b) Montrer qu'en posant :

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

on définit deux normes sur E.

(c) Montrer que ces normes sont équivalentes.

42.14

Pour $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\|A\| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

(c) Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ N(AX) \leqslant \|A\|\, N(X)$$

(d) En déduire que :

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{N(X)=1} N(AX)$$

42.15

On considère $\mathcal{B}$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)_n$ une suite réelle. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur la suite a l'application :

$$N_a\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}$?

(b) Comparer dans ce cas N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

42.16

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_\infty(f) = \operatorname*{Max}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

(a) Justifier l'existence de N_∞.

(b) Montrer que N est une norme sur E.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on définit :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$$

Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ en fonction de n.

(d) Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(e) Montrer que :
$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) \leqslant N(f)$$

42.17

Montrer que l'ensemble :

$$A = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n,\ x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\right\}$$

est une partie bornée et convexe de $\mathbb{R}^n$.

42.18

Soit E un espace vectoriel réel, et $N\ :\ E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0$$
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

Montrer que N définit une norme sur E si et seulement si l'ensemble :

$$B = \{x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$$

est une partie convexe de E.

42.19

On considère $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $u \in \mathcal{B}$, on définit la suite Δu par :

$$\Delta u(n) = u_{n+1} - u_n$$

et on note $F = \{\Delta u,\ u \in \mathcal{B}\}$.
Déterminer la distance $d(1, F)$ de la suite constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F.

42.20

On considère $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[-1, 1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et F le sous-espace de E formé des fonctions continues. On définit

$$f\ :\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Déterminer la distance $d(f, F)$.

42.21

On considère $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On note $u = \big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Calculer la distance $d(u, 1)$ de la suite u à la suite constante égale à 1. Calculer de même $d(u, -1)$ et $d(u, 0)$.

(b) Calculer la distance $d(u, \mathcal{C})$ de u au sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes.

42.22

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
Pour A partie bornée de E, on appelle **diamètre** de A la quantité :

$$\delta(A) = \operatorname*{Sup}_{x,y \in A} \|y - x\|$$

(a) Justifier l'existence de $\delta(A)$.

On considère A et B deux parties non vides et bornées de E.

(b) Montrer que :
$$A \subset B \implies \delta(A) \leqslant \delta(B)$$

(c) Lorsque $A \cap B \neq \varnothing$, montrer que :

$$\delta(A \cap B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$$

42.23

On note L le $\mathbb{R}$-e.v. des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1] \to \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|\ :\ L \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = |f(0)| + \operatorname*{Sup}_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est une norme sur L, et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $N_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E_1, et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$.