

Espace vectoriel normé

Cours	2
1 Normes	2
1.1 Définitions	2
1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire	3
1.3 Les normes usuelles	3
1.4 Boules	4
1.5 Parties bornées	4
1.6 Espace vectoriel normé produit	5
2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	5
2.1 Convergence, divergence	5
2.2 Suites bornées	5
2.3 Opérations sur les suites convergentes	6
2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit	6
3 Comparaison des normes	6
3.1 Normes équivalentes	6
3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence	7
3.3 Comparer deux normes	7
4 Annexes	7
4.1 Annexe : des espaces normés de suites	7
Exercices	8
Exercices et résultats classiques à connaître	8
La norme infinie est une norme	8
Les boules sont convexes	8
Une convergence qui dépend du choix de la norme	8
Exercices du CCINP	9
Exercices	9
Petits problèmes d'entraînement	10

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :

E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{K} , éventuellement muni d'une norme $\|\cdot\|$.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Normes

1.1 Définitions

Définition. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **norme** sur E si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
- Séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- Lorsqu'il y a un risque d'ambiguïté (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé espace vectoriel normé.
- On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x .
- Lorsque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur **unitaire**. Lorsque $x \neq 0$, $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire, de même direction et même sens que x .

Exemple. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \int_0^{+\infty} |P(t)|e^{-t} dt$$

Définition. On appelle **distance associée à $\|\cdot\|$** l'application :

$$\begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \|y - x\| \end{aligned}$$

Proposition. Pour tous vecteurs de E , on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (\leq \|x\| + \|y\|)$
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \quad (\leq \|x\| + \|y\|)$

Proposition. Pour tous vecteurs de E , on a :

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) = 0 \implies x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors la norme sur E induit une norme sur F .

Définition. Soit A une partie non vide de E , et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** la quantité :

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$$

Remarque. Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$, mais on verra que la réciproque est fausse en général.

1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E , appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.3 Les normes usuelles

1.3.1 Normes usuelles sur \mathbb{K}^p

Définition. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie**.

Théorème.

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{K}^p .

1.3.2 Normes usuelles sur l'ensemble des matrices

Exemple. Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \\ j \leq p}}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \\ j \leq p}} |m_{ij}|, \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \\ j \leq p}} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(M^\top M)}, \quad \|M\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \\ j \leq p}} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

1.3.3 Normes usuelles sur l'espace des polynômes

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur E .

1.3.4 Normes usuelles sur les espaces de fonctions

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E .

Lemme. Pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}_+$:

$$\sup\{kx, x \in A\} = k \sup(A)$$

Remarque. Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des Sup. On travaille sur le « supande ».

Définition. Pour X ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geq 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq M$$

Théorème.

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Remarque. Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.

1.4 Boules

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit :

- la **boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$** :

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$$

- la **boule fermée de centre x et de rayon $r \geq 0$** :

$$BF(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$$

- la **sphère de centre x et de rayon $r \geq 0$** :

$$S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$$

Remarque. Un singleton est une boule fermée.

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R} muni de sa norme usuelle.

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de ses normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{\infty}$.

Définition. Soit A une partie de E . On dit que A est **convexe** si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in A$$

Proposition. Toute boule B est une **partie convexe** de E .

1.5 Parties bornées

Définition. Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \|x\| \leq M$$

Proposition.

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

Remarque. Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.

Exemple. Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

Remarque. Montrer qu'une partie A est bornée, c'est majorer la norme de ses éléments x par une quantité indépendante de x .

Exemple. On considère l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, muni des deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k| \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$$

Que dire de l'ensemble A des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ?

Méthode. Pour montrer que A n'est pas bornée, on exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque. Dire qu'une fonction (resp. une suite) à valeurs dans E est bornée, c'est dire que l'ensemble de ses valeurs est borné.

1.6 Espace vectoriel normé produit

Définition. On considère p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) sur le corps \mathbb{K} . Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, on définit :

$$N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} N_i(x)$$

Alors N est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$, et $(E_1 \times \dots \times E_p, N)$ s'appelle l'espace vectoriel normé produit des $((E_i, N_i))_{1 \leq i \leq p}$.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

2.1 Convergence, divergence

Définition. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.

Proposition. En cas de convergence, ℓ est unique et s'appelle la **limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarque. On trouve aussi la notation $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ que l'on évitera d'utiliser.

Remarque. Dans un e.v.n. autre que \mathbb{R} , ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.

La proposition qui suit est immédiate :

Proposition. La suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

Exemple. Étudier la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n \sin \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_n : t \mapsto t^n$.

2.2 Suites bornées

Définition. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' . Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$.

La réciproque est bien sûr fausse.

2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit

Définition. Soit E est un espace vectoriel de dimension finie p , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E . À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \dots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le p -uplet des coordonnées de u_n dans la base \mathcal{B} .

Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ est la k -ème suite coordonnée de $(u_n)_n$ dans la base \mathcal{B} .

Théorème.

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent. Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et, pour tout k , $u_n^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \dots + \ell_p e_p$$

Exemple. Étudier la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{n})^n & (1 - \frac{1}{n})^{n^2} \\ (1 - \frac{1}{n})^{\sqrt{n}} & (1 + \frac{1}{n})^n \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E = E_1 \times \dots \times E_p$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$$

où les suites $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les suites composantes de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, x_n^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_k$$

3 Comparaison des normes

3.1 Normes équivalentes

Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Remarque. Cela revient à dire qu'il existe $\beta, \gamma > 0$ tels que :

$$N_2 \leq \beta N_1 \text{ et } N_1 \leq \gamma N_2$$

Remarque. C'est une relation d'équivalence.

Exemple. Dans \mathbb{K}^p , les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème (spoiler).

Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence

Proposition. Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors :

- $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement si A est bornée pour N_2
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour N_2 .

3.3 Comparer deux normes

Méthode. Comparer N_1 et N_2 , c'est regarder s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$ et regarder s'il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leq \beta N_1$.

- Pour montrer l'existence de α :
 - Si E est de dimension finie, on affirme l'existence de α (sans connaître sa valeur)
 - Sinon, on part de $N_1(x)$ que l'on cherche à majorer en faisant apparaître $N_2(x)$. Une valeur possible du coefficient α devrait apparaître.
 - Pour montrer qu'un tel α n'existe pas, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que, par exemple, $N_1(x_n)$ soit constante et $N_2(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ou alors telle que $N_1(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ tandis que $N_2(x_n)$ reste constante.
- Si $E = \mathbb{K}[X]$, la suite ne peut pas rester dans un sous-espace de dimension finie $\mathbb{K}_p[X]$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que les deux normes N_1 et N_2 précédentes ne sont pas équivalentes.

4 Annexes

4.1 Annexe : des espaces normés de suites

On doit pouvoir démontrer les résultats suivants :

Proposition. On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de \mathbb{K} . Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Proposition. On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites sommables d'éléments de \mathbb{K} . Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Proposition. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites de carré sommable d'éléments de \mathbb{K} . Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Exercices et résultats classiques à connaître

La norme infinie est une norme

420.1

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$. Montrer qu'en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} (|f(t)|)$$

on définit une norme sur E .

Les boules sont convexes

420.2

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de E est convexe.

Une convergence qui dépend du choix de la norme

420.3

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)| dt$$

(a) Montrer que N est une norme sur E .

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} n(1 - nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in]1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ et vérifier que, pour la norme N , $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$. Qu'en conclure ?

Exercices du CCINP

420.4
 1.1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

420.5
 37.12

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

420.6
 54.21

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
(a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

420.7
 61.1

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercices

420.8

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, et N l'application définie par :

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|$$

À quelle(s) condition(s) sur a_1, \dots, a_n l'application N définit-elle une norme sur \mathbb{K}^n .

420.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

420.10

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B, N(AB) \leq c N(A) N(B)$$

420.11


Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$$

- (a) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- (b) Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.
- (c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) \leq 2\|(x, y)\|_\infty \text{ et } \|(x, y)\|_\infty \leq 2N(x, y)$$


Petits problèmes d'entraînement

420.12 

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_∞ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_\infty(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

- Démontrer que N_1 et N_∞ définissent deux normes sur E .
- Étudier, pour chacune de ces normes, la convergence de la suite $(P_n)_n$ où $P_n = \frac{1}{n} X^n$.
- Les deux normes sont-elles équivalentes ?

420.13 

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

- Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.
- Montrer qu'en posant :

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

on définit deux normes sur E .

- Montrer que ces normes sont équivalentes.

420.14

Pour $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

- Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que cette norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

- Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), N(AX) \leq \|A\| N(X)$$

- En déduire que :

$$\|A\| = \sup_{N(X)=1} N(AX)$$

420.15

On considère \mathcal{B} l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- Soit $a = (a_n)_n$ une suite réelle. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur la suite a l'application :

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur \mathcal{B} ?

- Comparer dans ce cas N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

420.16

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \text{ et } N_\infty(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

- Justifier l'existence de N_∞ .
- Montrer que N est une norme sur E .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on définit :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ en fonction de n .

(d) Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(e) Montrer que :

$$\forall f \in E, N_\infty(f) \leq N(f)$$

420.17

(a) Montrer que l'application :

$$N : P \mapsto \sup_{x \in [-2, -1]} |P(x)|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

On considère $N' : P \mapsto \sup_{x \in [1, 2]} |P(x)|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère l'application f définie sur $[-2, 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Justifier l'existence d'une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-2, 2]$.

(c) Montrer l'existence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ convergeant pour N et N' vers deux limites distinctes.

420.18

Montrer que l'ensemble :

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$

est une partie bornée et convexe de \mathbb{R}^n .

420.19

Soit E un espace vectoriel réel, et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, N(x) = 0 &\implies x = 0 \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) &= |\lambda|N(x) \end{aligned}$$

Montrer que N définit une norme sur E si et seulement si l'ensemble :

$$B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$$

est une partie convexe de E .

420.20

On considère \mathcal{B} l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $u \in \mathcal{B}$, on définit la suite Δu par :

$$\Delta u(n) = u_{n+1} - u_n$$

et on note $F = \{\Delta u, u \in \mathcal{B}\}$.

Déterminer la distance $d(1, F)$ de la suite constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F .

420.21

On considère \mathcal{B} l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[-1, 1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et F le sous-espace de E formé des fonctions continues. On définit

$$f : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Déterminer la distance $d(f, F)$.

420.22

On considère \mathcal{B} l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On note $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Calculer la distance $d(u, 1)$ de la suite u à la suite constante égale à 1. Calculer de même $d(u, -1)$ et $d(u, 0)$.

(b) Calculer la distance $d(u, \mathcal{C})$ de u au sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes.

420.23

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

Pour A partie bornée de E , on appelle **diamètre** de A la quantité :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|y - x\|$$

(a) Justifier l'existence de $\delta(A)$.

On considère A et B deux parties non vides et bornées de E .

(b) Montrer que :

$$A \subset B \implies \delta(A) \leq \delta(B)$$

(c) Lorsque $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que :

$$\delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B)$$

420.24

On note L le \mathbb{R} -e.v. des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et $E_1 = C^1([0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est une norme sur L , et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $N_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E_1 , et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$.

420.25

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ et E_+ l'ensemble des éléments de E qui sont à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Pour $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on note :

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 \varphi(t) |f(t)| dt \text{ et } A_\varphi = \{t \in [0, 1], \varphi(t) \neq 0\}$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E si et seulement si A_φ est dense dans $[0, 1]$.

(b) Soit φ_1 et φ_2 deux éléments de E à valeurs strictement positives. Montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

(c) Pour $\varphi_1 : t \mapsto t$ et $\varphi_2 : t \mapsto t^2$, montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ ne sont pas équivalentes.

420.26

Soit E un espace vectoriel normé réel, muni des deux normes N_1 et N_2 . On note B_1 (resp. B_2) la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N_1 (resp. N_2).

(a) A t-on l'équivalence :

$$B_1 = B_2 \iff N_1 = N_2$$

(b) Et si les boules sont ouvertes ?

420.27

On note $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. On considère l'application N définie par :

$$N(f) = \|3f + f'\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |3f(t) + f'(t)|$$

(a) Montrer que f définit une norme sur E .

(b) Déterminer $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \alpha N(f)$$

(c) Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes ?

420.28

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable vérifiant :

$$\text{Sp}(A) \subset]-1, 1[$$

Montrer que la suite $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.

(b) Montrer que le résultat reste valable si l'on suppose A seulement trigonalisable.

420.29

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$ de l'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- (a) Montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_d \in [0, 1]$ tels que :

$$N : f \mapsto \sum_{i=1}^d |f(a_i)|$$

définisse une norme sur E .

- (b) Soit $(f_n)_n$ une suite de E , qui converge simplement vers une fonction f . Montrer que $f \in E$, puis que la convergence est uniforme.

420.30

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$. Pour $x \in E$, on pose :

$$N(x) = \max_{u \in G} \|u(x)\|$$

- (a) Montrer que N définit une norme sur E .
 (b) Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in G$:

$$N(u(x)) = N(x)$$

420.31

Soit B une partie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie. À quelle

condition sur B existe-t-il une norme sur E pour laquelle B est la boule unité fermée ?

420.32

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| \leq 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose :

$$\|P\| = \max\{|P(z)|, z \in \mathbb{U}\}$$

- (a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

- (b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, établir :

$$|P(0)| \leq \|P\|$$

- (c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P(z_0 + re^{i\theta}) - P(z_0) \underset{r \rightarrow 0^+}{\sim} cr^q e^{iq\theta}$$

- (d) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \|P\| = \sup\{|P(z)|, z \in B\}$$