# Espace vectoriel normé

**Cours** 2



**Exercices** 8

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :
$E$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, éventuellement muni d'une norme $\|\cdot\|$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# 1 Normes

## 1.1 Définitions

**Définition.** Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** sur $E$ si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si $E$ est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

**Remarque.**

- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple $(E, N)$ qui est appelé espace vectoriel normé.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur $x$.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que $x$ est un vecteur **unitaire**. Lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire, de même direction et même sens que $x$.*

**Exemple.** Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \int_0^{+\infty} |P(t)| \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

**Définition.** On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} d : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|y - x\| \end{array}$$

**Proposition.** Pour tous vecteurs de $E$, on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x + y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$

**Proposition.** Pour tous vecteurs de $E$, on a :

- $d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

**Proposition.** Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors la norme sur $E$ induit une norme sur $F$.

**Définition.** Soit $A$ une partie non vide de $E$, et $x \in E$. On appelle **distance de** $x$ **à** $A$ la quantité :

$$d(x, A) = \mathrm{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\}$$

**Remarque.** *Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$, mais on verra que la réciproque est fausse en général.*

## 1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

**Théorème.**

Si $E$ est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur $E$, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

## 1.3 Les normes usuelles

### 1.3.1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$

**Définition.** Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie**.

**Théorème.**

$\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

### 1.3.2 Normes usuelles sur l'ensemble des matrices

**Exemple.** Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|, \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(M^\top M\right)}, \qquad \|M\|_\infty = \operatorname*{Max}_{\substack{1 \leqslant i \\ j \leqslant p}} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

### 1.3.3 Normes usuelles sur l'espace des polynômes

**Exemple.** Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ :

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \operatorname*{Max}_{i \in \{0, \ldots, n\}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur $E$.

### 1.3.4 Normes usuelles sur les espaces de fonctions

**Exemple.** Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$ :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur $E$.

**Lemme.** Pour $A$ partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$ :

$$\operatorname{Sup}\{kx, \ x \in A\} = k \operatorname{Sup}(A)$$

**Remarque.** *Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des* Sup. *On travaille sur le « supande ».*

**Définition.** Pour $X$ ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M$$

**Théorème.**

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$$

**Remarque.** *Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.*

## 1.4 Boules

**Définition.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $d$ la distance associée. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit :

- la **boule ouverte de centre** $x$ **et de rayon** $r > 0$ :

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}$$

- la **boule fermée de centre** $x$ **et de rayon** $r \geqslant 0$ :

$$BF(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leqslant r\}$$

- la **sphère de centre** $x$ **et de rayon** $r \geqslant 0$ :

$$S(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) = r\}$$

**Remarque.** *Un singleton est une boule fermée.*

**Exemple.** Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

**Exemple.** Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de ses normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est **convexe** si et seulement si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in A$$

**Proposition.** Toute boule $B$ est une **partie convexe** de $E$.

## 1.5 Parties bornées

**Définition.** Une partie $A$ de $E$ est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$$

**Proposition.**

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

**Remarque.** *Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.*

**Exemple.** Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

**Remarque.** *Montrer qu'une partie $A$ est bornée, c'est majorer la norme de ses éléments $x$ par une quantité indépendante de $x$.*

**Exemple.** On considère l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, muni des deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant d} |a_k|$$

Que dire de l'ensemble $A$ des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ?

**Méthode.** *Pour montrer que $A$ n'est pas bornée, on exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A$ telle que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

**Remarque.** *Dire qu'une fonction (resp. une suite) à valeurs dans $E$ est bornée, c'est dire que l'ensemble de ses valeurs est borné.*

### 1.6 Espace vectoriel normé produit

**Définition.** On considère $p$ espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)$ sur le corps $\mathbb{K}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, on définit :

$$N(x) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} N_i(x)$$

Alors $N$ est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$, et $(E_1 \times \dots \times E_p, N)$ s'appelle **l'espace vectoriel normé produit des $\big((E_i, N_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$**.

## 2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

### 2.1 Convergence, divergence

**Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.

**Proposition.** En cas de convergence, $\ell$ est unique et s'appelle **la limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

**Remarque.** *On trouve aussi la notation $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ que l'on évitera d'utiliser.*

**Remarque.** *Dans un e.v.n. autre que $\mathbb{R}$, ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.*

La proposition qui suit est immédiate :

**Proposition.** La suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell$ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

**Exemple.** Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n\sin\frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

**Exemple.** Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : t \mapsto t^n$.

### 2.2 Suites bornées

**Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

**Proposition.** Toute suite convergente est bornée.

### 2.3 Opérations sur les suites convergentes

**Proposition.** Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives $\ell$ et $\ell'$. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

**Corollaire.** L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

**Proposition.** Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.
La réciproque est bien sûr fausse.

### 2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit

**Définition.** Soit $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $p$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. À $n$ fixé, $u_n$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le $p$-uplet des coordonnées de $u_n$ dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **$k$-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Théorème.**

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les $p$ suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout $k$, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

**Exemple.** Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

**Proposition.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$x_n = \left(x_n^1, \dots, x_n^p\right)$$

où les suites $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites composantes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\},\ x_n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

## 3 Comparaison des normes

### 3.1 Normes équivalentes

**Définition.** Deux normes $N_1$ et $N_2$ sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

**Remarque.** *Cela revient à dire qu'il existe $\beta, \gamma > 0$ tels que :*

$$N_2 \leqslant \beta N_1 \text{ et } N_1 \leqslant \gamma N_2$$

**Remarque.** *C'est une relation d'équivalence.*

**Exemple.** Dans $\mathbb{K}^p$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

**Théorème (spoiler).**

Si $E$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

## 3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence

**Proposition.** Si deux normes $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes, alors :

- $A \subset E$ est bornée pour $N_1$ si et seulement $A$ est bornée pour $N_2$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ pour $N_1$ si et seulement si elle converge vers $\ell$ pour $N_2$.

## 3.3 Comparer deux normes

**Méthode.** *Comparer $N_1$ et $N_2$, c'est regarder s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et regarder s'il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.*

- *Pour montrer l'existence de $\alpha$ :*
  - *Si $E$ est de dimension finie, on affirme l'existence de $\alpha$ (sans connaître sa valeur)*
  - *Sinon, on part de $N_1(x)$ que l'on cherche à majorer en faisant apparaître $N_2(x)$. Une valeur possible du coefficient $\alpha$ devrait apparaître.*
- *Pour montrer qu'un tel $\alpha$ n'existe pas, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $E$ telle que, par exemple, $N_1(x_n)$ soit constante et $N_2(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ou alors telle que $N_1(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ tandis que $N_2(x_n)$ reste constante.*
  *Si $E = \mathbb{K}[X]$, la suite ne peut pas rester dans un sous-espace de dimension fini $\mathbb{K}_p[X]$.*

**Exemple.** Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que les deux normes $N_1$ et $N_2$ précédentes ne sont pas équivalentes.

# 4 Annexes

## 4.1 Annexe : des espaces normés de suites

On doit pouvoir démontrer les résultats suivants :

**Proposition.** On note $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

**Proposition.** On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

**Proposition.** On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de carré sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Il est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

# Exercices et résultats classiques à connaître

## La norme infinie est une norme

**42.1**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions numériques bornées sur $[0,1]$. Montrer qu'en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} (|f(t)|)$$

on définit une norme sur $E$.

## Les boules sont convexes

**42.2**

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de $E$ est convexe.

## Une convergence qui dépend du choix de la norme

**42.3**

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n \,:\, t \mapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in \,]1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ et vérifier que, pour la norme $N$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$. Qu'en conclure ?

## Exercices du CCINP

**42.4** CCINP 1.1

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

**42.5** CCINP 37.12

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E,\ N_\infty(f) = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que $N_\infty$ et $N_1$ sont deux normes sur $E$.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

**42.6** CCINP 54.21

Soit $E$ l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ ||u|| = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Sup}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\ .\ ||$ est une norme sur $E$.

**42.7** CCINP 61.1

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}{\text{Max}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## Exercices

**42.8**

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, et $N$ l'application définie par :

$$N(x_1, \ldots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

À quelle(s) condition(s) sur $a_1, \ldots, a_n$ l'application $N$ définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$.

**42.9**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |P(t)|$$

**42.10**

Soit $N$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B,\ N(AB) \leqslant cN(A)\,N(B)$$

**42.11**

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$N(x, y) = \text{Max}(|x|, |x + y|)$$

(a) Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.

(c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$N(x, y) \leqslant 2\|(x, y)\|_\infty \text{ et } \|(x, y)\|_\infty \leqslant 2N(x, y)$$

## Petits problèmes d'entrainement

**42.12** ✍

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit $N_1$ et $N\infty$ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_\infty(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) Démontrer que $N_1$ et $N_\infty$ définissent deux normes sur $E$.

(b) Étudier, pour chacune de ces normes, la convergence de la suite $(P_n)_n$ où $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$.

(c) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

**42.13** ✍

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

(a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.

(b) Montrer qu'en posant :

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

on définit deux normes sur $E$.

(c) Montrer que ces normes sont équivalentes.

**42.14**

Pour $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\|A\| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

(c) Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ N(AX) \leqslant \|A\|\,N(X)$$

(d) En déduire que :

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{N(X)=1} N(AX)$$

**42.15**

On considère $\mathcal{B}$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)_n$ une suite réelle. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $a$ l'application :

$$N_a \;:\; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}$ ?

(b) Comparer dans ce cas $N_a$ et $\|\cdot\|_\infty$.

**42.16**

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_\infty(f) = \operatorname*{Max}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

(a) Justifier l'existence de $N_\infty$.

(b) Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on définit :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$$

Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ en fonction de $n$.

(d) Montrer que $N$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(e) Montrer que :
$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) \leqslant N(f)$$

**42.17**

Montrer que l'ensemble :
$$A = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n,\ x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\big\}$$
est une partie bornée et convexe de $\mathbb{R}^n$.

**42.18**

Soit $E$ un espace vectoriel réel, et $N\ :\ E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie :
$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0$$
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
Montrer que $N$ définit une norme sur $E$ si et seulement si l'ensemble :
$$B = \{x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$$
est une partie convexe de $E$.

**42.19**

On considère $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $u \in \mathcal{B}$, on définit la suite $\Delta u$ par :
$$\Delta u(n) = u_{n+1} - u_n$$
et on note $F = \{\Delta u,\ u \in \mathcal{B}\}$.
Déterminer la distance $d(1, F)$ de la suite constante égale à 1 au sous-espace vectoriel $F$.

**42.20**

On considère $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[-1, 1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $F$ le sous-espace de $E$ formé des fonctions continues. On définit
$$f\ :\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 1] \end{cases}$$
Déterminer la distance $d(f, F)$.

**42.21**

On considère $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On note $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Calculer la distance $d(u, 1)$ de la suite $u$ à la suite constante égale à 1. Calculer de même $d(u, -1)$ et $d(u, 0)$.

(b) Calculer la distance $d(u, \mathcal{C})$ de $u$ au sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes.

**42.22**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
Pour $A$ partie bornée de $E$, on appelle **diamètre** de $A$ la quantité :
$$\delta(A) = \operatorname*{Sup}_{x,y\in A} \|y - x\|$$

(a) Justifier l'existence de $\delta(A)$.

On considère $A$ et $B$ deux parties non vides et bornées de $E$.

(b) Montrer que :
$$A \subset B \implies \delta(A) \leqslant \delta(B)$$

(c) Lorsque $A \cap B \neq \varnothing$, montrer que :
$$\delta(A \cap B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$$

**42.23**

On note $L$ le $\mathbb{R}$-e.v. des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1] \to \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|\ :\ L \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\|f\| = |f(0)| + \operatorname*{Sup}_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$
est une norme sur $L$, et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $N_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} |f'(t)|$$

est une norme sur $E_1$, et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$.

**42.24**

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et $E_+$ l'ensemble des éléments de $E$ qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on note :

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } A_\varphi = \{t \in [0,1],\ \varphi(t) \neq 0\}$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur $E$ si et seulement si $A_\varphi$ est dense dans $[0,1]$.

(b) Soit $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux éléments de $E$ à valeurs strictement positives. Montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

(c) Pour $\varphi_1 : t \mapsto t$ et $\varphi_2 : t \mapsto t^2$, montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ ne sont pas équivalentes.

**42.25**

Soit $E$ un espace vectoriel normé réel, muni des deux normes $N_1$ et $N_2$. On note $B_1$ (resp. $B_2$) la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour $N_1$ (resp. $N_2$).

(a) A t-on l'équivalence :

$$B_1 = B_2 \iff N_1 = N_2$$

(b) Et si les boules sont ouvertes ?

**42.26**

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. On considère l'application $N$ définie par :

$$N(f) = \|3f + f'\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} |3f(t) + f'(t)|$$

(a) Montrer que $f$ définit une norme sur $E$.

(b) Déterminer $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant \alpha N(f)$$

(c) Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ et $N$ sont équivalentes ?

**42.27**

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable vérifiant :

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \left]-1,1\right[$$

Montrer que la suite $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.

(b) Montrer que le résultat reste valable si l'on suppose $A$ seulement trigonalisable.

**42.28**

Soit $E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$ de l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe $a_1,\dots,a_d \in [0,1]$ tels que :

$$N : f \mapsto \sum_{i=1}^{d} |f(a_i)|$$

définisse une norme sur $E$.

(b) Soit $(f_n)_n$ une suite de $E$, qui converge simplement vers une fonction $f$. Montrer que $f \in E$, puis que la convergence est uniforme.

**42.29**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Pour $x \in E$, on pose :

$$N(x) = \underset{u\in G}{\operatorname{Max}} \|u(x)\|$$

(a) Montrer que $N$ définit une norme sur $E$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in G$ :

$$N(u(x)) = N(x)$$

**42.30**

Soit $B$ une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. À quelle condition sur $B$ existe-t-il une norme sur $E$ pour laquelle $B$ est la boule unité fermée ?

**42.31**

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C},\ \|z\| \leqslant 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose :

$$\|P\| = \mathrm{Max}\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{U}\}$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

(b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, établir :

$$|P(0)| \leqslant \|P\|$$

(c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - P(z_0) \underset{r \to 0^+}{\sim} c r^q \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$$

(d) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \|P\| = \mathrm{Sup}\{|P(z)|,\ z \in B\}$$