Topologie des espaces vectoriels normés

Cours 2

Exercices 5

1 Points intérieurs, ouvert, voisinage

1.1 Voisinage d'un point

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un **voisinage de** a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$B(a, \delta) \subset V$$

où $B(a, \delta) = \{x \in E,\ \|x - a\| < \delta\}$.

Remarque.

- *L'usage est d'utiliser une boule ouverte, une inégalité stricte.*
- *On trouve parfois la notation $\mathcal{V}(a)$ pour désigner l'ensembles des voisinages de a.*

Proposition.

- Si V est un voisinage de a et $V \subset W$ alors W est un voisinage de a.
- Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
- Une réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

Remarque. *Pour la réunion, il suffit en fait qu'un seul ensemble soit un voisinage.*

Proposition. Si N et N' sont deux normes équivalentes, les voisinages de a dans (E, N) et (E, N') sont les mêmes.

1.2 Ouvert

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On dit qu'une partie U de E est un **ouvert** lorsque U est voisinage de chacun de ses points, i.e. :

$$\forall x \in U,\ \exists \delta > 0,\ B(x, \delta) \subset U$$

Remarque. *E et $\varnothing$ sont ouverts.*

Proposition. Une boule ouverte est un ouvert.

Proposition.

- Une réunion d'ouverts est un ouvert :
$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ est ouvert}$$
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert :
$$U_1 \cap \cdots \cap U_p \text{ est ouvert}$$

Remarque. *L'intérêt de travailler dans un ouvert, c'est que ses éléments ne sont jamais « au bord ».*

Proposition. Un produit fini d'ouvert est un ouvert.

1.3 Point intérieur, intérieur

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point a de E est dit **intérieur à** A lorsque A est un voisinage de a, i.e. :

$$\exists \delta > 0,\ B(a, \delta) \subset A$$

On appelle **intérieur de** A l'ensemble $\mathring{A}$ de tous les points intérieurs à A.

Proposition. A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Proposition. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.

2 Points adhérents, fermé, densité

2.1 Fermé

Définition. On dit qu'une partie A de E est un **fermé** lorsque $E \setminus A = A^c$ est un ouvert.

Exemple. E et $\varnothing$ sont fermés.

Proposition. Une boule fermée est fermée, une sphère est fermée, un singleton $\{a\}$ est fermé.

Proposition.

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Proposition. Un produit fini de fermés est un fermé.

2.2 Point adhérent, adhérence, frontière

Définition. Soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est **adhérent à** A lorsque :

$$\forall \delta > 0,\ B(x, \delta) \cap A \neq \varnothing$$

On appelle **adhérence de** A l'ensemble $\overline{A}$ de tous les points adhérents à A.

Proposition. A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Proposition. On dispose de l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

Définition. On appelle **frontière de** A l'ensemble :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

2.3 Densité

Définition. Une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite **dense dans** E lorsque $\overline{A} = E$, c'est-à-dire :

- tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A

ou alors

- $\forall x \in E,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Exemple. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ par le théorème de Weierstrass.

Exemple. Le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble $(\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues par morceaux.

2.4 Caractérisations séquentielles

Proposition. Une partie A de E est un fermé si et seulement si, pour toute suite convergente d'éléments de A, sa limite est dans A.

Remarque. *L'intérêt de travailler dans un fermé, c'est que « quand on y est, on y reste », même en passant à la limite.*

Proposition. x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

3 Topologie et normes équivalentes

Théorème.

Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si A est un ouvert de (E, N_1) et N_2 équivalente à N_1, alors A est un ouvert de (E, N_2).
- L'intérieur de A dans (E, N_1), lorsque N_2 équivalente à N_1, est le même que l'intérieur de A dans (E, N_2).
- etc.

4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de** a **dans** A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset X$

Remarque. *Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).*

Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de** A si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a, r) \cap A \subset X$$

Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $U \cap A$ est la* ***trace*** *laissée par U sur A.*

Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0, 1]$?

1. $[0, 1]$
2. $\{0\}$
3. $[0, 1/2]$
4. $[0, 3/4[$
5. $[0, 1] \setminus [1/2, 3/4]$
6. $]0, 1[$
7. $]0, 1/2[$

4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de** A lorsque $A \setminus X$ est un ouvert relatif de A.

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $F \cap A$ est la* ***trace*** *laissée par F sur A.*

Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A, alors $\ell \in X$.

Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0, 0)$ et $a = (1, 1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X.

Exercices et résultats classiques à connaître

Densité des matrices inversibles

43.1

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les sous-groupes de $\mathbb{R}$

43.2

Soit H un sous-groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$.

(a) Justifier l'existence de $\alpha = \mathrm{Inf}\{x \in H,\ x > 0\}$.

(b) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in H$, puis $H = \alpha\mathbb{Z}$.

(c) On suppose $\alpha = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Sous-espace vectoriel d'intérieur non vide

43.3

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Montrer que $F = E$.

Exercices du CCINP

43.4 — 1.3

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   Soit $c : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{cases}$

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
   On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$.
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

43.5 — 34

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

43.6 — 37.13

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E,\ N_\infty(f) = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

43.7 — 38

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E,\ ||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x\ \in [0,1],\ g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.

(c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

43.8 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

43.9 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|\ \|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \operatorname*{Inf}\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Exercices

43.10

Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$:

- en utilisant la caractérisation séquentielle ;
- en étudiant son complémentaire.

43.11

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

43.12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer que :

$$\mathrm{Sup}(A) \in \overline{A}$$

43.13

Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

43.14

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

43.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

43.16

Déterminer $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q})$.

43.17

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, montrer que :

$$\overline{[0,1[} = [0,1] \text{ et } \overset{\circ}{\widehat{[0,1[}} =]0,1[$$

Petits problèmes d'entrainement

43.18 ✍

On travaille dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on définit :

$$A = \left\{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\right\}$$

(a) Montrer que A est un fermé.

(b) Vérifier que, pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.

(c) Calculer $d(0_E, A)$.

43.19 ✍

(a) Montrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Observer que $A + B$ n'est pas fermée.

43.20

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un même espace vectoriel E. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$$

Montrer que tout ouvert de (E, N_1) est ouvert de (E, N_2).

43.21

Dans E espace normé, montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre, de même rayon.

43.22

On considère E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, ayant pour limite 0 en $\pm\infty$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$, toute fonction de E étant bornée sur $\mathbb{R}$.
On considère F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions à support compact, i.e. :

$$f \in F \iff \exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M],\ f(x) = 0$$

Montrer que F est dense dans E.

43.23

Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

43.24

On considère E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Est-ce que les ensembles suivant sont fermés ?

(a) A l'ensemble des suites croissantes.

(b) B l'ensemble des suites qui convergent vers 0.

(c) C l'ensemble des suites périodiques.

43.25

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

(a) Montrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

(c) On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense, soit fermé.

43.26

Montrer que l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

43.27

Soit E un espace vectoriel normé, et $X \subset E$

(a) Montrer que $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X.

(b) En déduire que $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X.

(c) Montrer que $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant X.

43.28

(a) Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion d'intervalles ouverts.

(b) Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

43.29

Soit E un espace vectoriel normé, A, B deux parties de E. On suppose que :

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{x\in A\\ y\in B}} \|y-x\| > 0$$

Démontrer que l'on peut séparer A et B par des ouverts, c'est-à-dire qu'il existe U et V ouverts tels que :

$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing$$