

# Limite, continuité dans un espace vectoriel normé

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Limite . . . . .	2
1.1 Définition, propriétés . . . . .	2
1.2 Caractérisation séquentielle . . . . .	2
1.3 Cas particulier de $\mathbb{R}$ . . . . .	2
1.4 Opérations sur les limites . . . . .	2
1.5 Limite par coordonnées, limite des fonctions à valeurs dans un espace produit . . . . .	3
2 Continuité . . . . .	4
2.1 Définition . . . . .	4
2.2 Caractérisation séquentielle . . . . .	4
2.3 Opérations sur les fonctions continues . . . . .	4
2.4 Continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit . . . . .	4
2.5 Continuité et densité . . . . .	5
2.6 Fonctions lipschitziennes, uniformément continues . . . . .	5
3 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue . . . . .	5
4 Annexes . . . . .	6
4.1 Annexe : unification des définitions à l'aide des voisinages . . . . .	6
4.2 Annexe : limite suivant une partie . . . . .	6
 <b>Exercices</b>	 <b>7</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	7
Continuité de la distance à une partie . . . . .	7
Une équation fonctionnelle . . . . .	7
Une application linéaire 1-lipschitzienne . . . . .	7
Exercices du CCINP . . . . .	8
Exercices . . . . .	8
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	8

Dans ce chapitre, sauf mention contraire,  $E$  et  $F$  désigne deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Limite

### 1.1 Définition, propriétés

**Définition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$ , et  $a \in \overline{A}$ . On dit que  $f$  a pour limite  $b$  en  $a$ , et on note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ , lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$

**Proposition.** La limite de  $f$  en  $a$ , si elle existe, est unique.

**Proposition.** L'existence et la valeur de la limite sont inchangées par passage à d'autres normes sur  $E$  et  $F$ , lorsqu'elles sont équivalentes aux normes initiales.

**Remarque.** On peut reformuler la définition en termes de boules.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \cap BF(a, \eta), f(x) \in BF(b, \varepsilon)$$

**Définition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$ . On dit que  $f(x)$  tend vers 0 lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$ , et on note  $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0_F$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|x\| \geq M \implies \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

### 1.2 Caractérisation séquentielle

**Proposition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$ , et  $a \in \overline{A}$  et  $b \in F$ .  $f$  a pour limite  $b$  en  $a$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b$ .

### 1.3 Cas particulier de $\mathbb{R}$

**Remarque.** Lorsque  $E = \mathbb{R}$  on peut envisager les limites lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , et lorsque  $F = \mathbb{R}$ , on peut envisager des limites infinies, même s'il serait abusif de dire que  $+\infty$  est adhérent à  $]-\infty, +\infty[$ . On peut donc adapter les définitions vues en première année.

**Définition.** Soit  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  une fonction de la variable réelle, où  $A$  n'est pas majorée. On dit que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq M \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$$

**Définition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique réelle, et  $a \in \overline{A}$ . On dit que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \geq M$$

### 1.4 Opérations sur les limites

**Proposition.** Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow F$  deux fonctions,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  deux scalaires. Soit  $a \in \overline{A}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$ , alors  $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda b + \mu c$ .

**Proposition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une fonction,  $\varphi : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction numérique. Soit  $a \in \overline{A}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  et  $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \lambda$ , alors  $(\varphi f)(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \lambda b$ .
- Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_F$  et  $\lambda$  bornée au voisinage de  $a$ , on écrit :

$$\|\lambda(x)f(x)\| \leq M\|f(x)\| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

pour conclure que  $\lambda(x)f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_F$ .

- Si  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ ,  $\lambda(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_{\mathbb{K}}$ , on écrit :

$$\|\lambda(x)f(x)\| \leq \|\lambda(x)\| M \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

pour conclure que  $\lambda(x)f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_F$ .

**Proposition.** Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions numériques et  $a \in \overline{A}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  et  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} c$ , alors  $(f \times g)(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b \times c$ .

**Proposition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $g : B \subset F \rightarrow G$  deux fonctions telles que  $f(A) \subset B$ . Soit  $a \in \overline{A}$  et  $b \in \overline{B}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  et  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow b]{} c$ , alors  $g \circ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} c$ .

## 1.5 Limite par coordonnées, limite des fonctions à valeurs dans un espace produit

**Définition.** Soit  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie  $p$ , muni d'une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ . Soit  $g : A \subset E \rightarrow F$ . À  $x \in A$  fixé,  $g(x)$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \dots + g_p(x)f_p$$

où  $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$  est le  $p$ -uplet des coordonnées de  $g(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , la fonction numérique  $g_k$  est la  $k$ -ème application coordonnée de  $g$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

**Théorème.**

Avec les notations précédentes, et avec  $\ell \in F$  dont les coordonnées sont  $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$ , on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, g_k(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell_k$$

**Remarque.** Ces dernières limites sont des limites dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition.** Soit  $g : A \subset E \rightarrow F$  où  $F = F_1 \times \dots \times F_p$ . On peut écrire, pour tout  $x \in A$  :

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$$

où les fonctions  $g_k$  sont les applications composantes de  $g$ .

Pour  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F$ , on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, g_k(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell_k$$

**Remarque.** Ces dernières limites sont des limites dans les espaces  $F_k$ .

## 2 Continuité

### 2.1 Définition

**Définition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $a \in A$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  lorsque :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

On dit que  $f$  est continue sur  $A$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

**Remarque.** La continuité en un point est une propriété locale.

### 2.2 Caractérisation séquentielle

**Proposition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $a \in A$ .  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$ .

### 2.3 Opérations sur les fonctions continues

**Proposition.** Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow F$  deux fonctions,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  deux scalaires et  $\varphi : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction numérique.

- Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ), alors  $\lambda f + \mu g$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).
- Si  $f$  et  $\varphi$  sont continues en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ), alors  $\varphi f : x \mapsto \varphi(x)f(x)$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

**Proposition.** Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow K$  deux fonctions numériques.

- Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ), alors  $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

**Proposition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $g : B \subset F \rightarrow G$  deux fonctions telles que  $f(A) \subset B$ .

- Si  $f$  est continue en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ) et  $g$  est continue en  $f(A)$  (resp. sur  $f(A)$ ), alors  $g \circ f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

### 2.4 Continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit

**Définition.** Soit  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie  $p$ , muni d'une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ . Soit  $g : A \subset E \rightarrow F$ . À  $x \in A$  fixé,  $g(x)$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \dots + g_p(x)f_p$$

où  $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$  est le  $p$ -uplet des coordonnées de  $g(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , la fonction numérique  $g_k$  est la  **$k$ -ème application coordonnée** de  $g$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

**Théorème.**

Avec les notations précédentes,  $g$  est continue en  $a \in A$  si et seulement si les  $p$  applications coordonnées  $g_k$  sont continues en  $a$ .

**Proposition.** Soit  $g : A \subset E \rightarrow F$  où  $F = F_1 \times \dots \times F_p$ . On peut écrire, pour tout  $x \in A$  :

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$$

où les fonctions  $g_k$  sont les applications composantes de  $g$ .

La fonction  $g$  est continue en  $a \in A$  si et seulement si les  $p$  applications composantes  $g_k$  sont continues en  $a$ .

## 2.5 Continuité et densité

### Théorème.

Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow F$  deux applications. Si :

- $f$  et  $g$  sont continues sur  $A$ ,
- $\forall x \in D \subset A, f(x) = g(x)$ ,
- $D$  est dense dans  $A$ ,

alors :

- $f = g$  i.e.  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$ .

**Remarque.** Ainsi, pour montrer une propriété « continue » sur un ensemble, il suffit de la montrer sur une partie dense de cet ensemble.

## 2.6 Fonctions lipschitziennes, uniformément continues

**Définition.** La fonction  $f : A \subset E \rightarrow F$  est **lipschitzienne** sur  $A$  si et seulement s'il existe  $k > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in A, \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$$

**Proposition.** Soit  $A \subset E$ , avec  $A \neq \emptyset$ . Alors l'application :  $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$  est 1-lipschitzienne.

**Définition.** La fonction  $f : A \subset E \rightarrow F$  est **uniformément continue** sur  $A$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in A, \|y - x\|_E \leq \eta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

### Proposition.

- Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.
- Les applications uniformément continues sont continues.

## 3 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue

### Théorème.

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une application continue. Alors l'image réciproque par  $f$  d'un ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) relatif de  $A$  :

- Si  $X$  est ouvert,  $f^{-1}(X)$  est un ouvert de  $A$
- Si  $X$  est fermé,  $f^{-1}(X)$  est un fermé de  $A$

**Proposition.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $A$ , à valeurs réelles. Alors, pour tout réel  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \{x \in A, f(x) = g(x)\} &\text{ et } \{x \in A, f(x) = \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A, f(x) \leq g(x)\} &\text{ et } \{x \in A, f(x) \leq \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A, f(x) < g(x)\} &\text{ et } \{x \in A, f(x) < \lambda\} \text{ sont des ouverts de } A \end{aligned}$$

## 4 Annexes

### 4.1 Annexe : unification des définitions à l'aide des voisinages

**Définition.** Si  $A$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$ , on appelle **voisinage de  $+\infty$  dans  $A$**  toute partie  $V \subset A$  telle qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  satisfaisant :

$$]M, +\infty[ \cap A \subset V$$

**Remarque.** Rappelons que, pour  $a \in \mathbb{R}$ , un **voisinage relatif de  $a$  dans  $A$**  est toute partie  $V$  de  $A$  telle qu'il existe  $\eta > 0$  satisfaisant :

$$]a - \eta, a + \eta[ \cap A \subset V$$

On note  $\mathcal{V}_A(a)$  l'ensemble des voisinages relatifs de  $a$  dans  $A$ .

**Proposition.** Soit  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a \in \bar{A} \cup \{\pm\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Alors  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists W \in \mathcal{V}_A(a), f(W) \subset V$$

### 4.2 Annexe : limite suivant une partie

**Définition.** Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$ .

On considère  $B$  une partie  $A$ , telle que  $a$  soit adhérent à  $B$ . La **limite de  $f$  en  $a$  suivant  $B$**  est, si elle existe, la limite en  $a$  de la restriction  $f|_B$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow[x \rightarrow a]{x \in B} \ell \\ \iff &\left( \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \right. \\ &\quad \left. \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

**Exemple.** Si  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  est une fonction de la variable réelle, on appelle **limite à droite en  $a$**  la limite de  $f$  en  $A$  suivant  $A \cap ]a, +\infty[$ , et si  $\ell$  est cette limite, on note :

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$$

en évitant soigneusement toute notation avec un symbole  $+$  en exposant, trop ambigu.

**Exercices et résultats classiques à connaître****Continuité de la distance à une partie****440.1**

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  espace normé. Montrer que l'application :

$$x \mapsto d(x, A)$$

est continue sur  $E$ .

**Une équation fonctionnelle****440.2**

On cherche les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(rx) = rf(x)$ .
- (b) Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \alpha x$ .

**Une application linéaire 1-lipschitzienne****440.3**

Soit  $E$  un espace normé de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer que  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$  sont supplémentaires.

## Exercices du CCINP

**440.4**

 35

$E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels normés.

On note  $\|\cdot\|_E$  (respectivement  $\|\cdot\|_F$ ) la norme sur  $E$  (respectivement sur  $F$ ).

- Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $a$  un point de  $E$ .

On considère les propositions suivantes :

**P1.**  $f$  est continue en  $a$ .

**P2.** Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ .

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

- Soit  $A$  une partie dense dans  $E$ , et soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$ .

Démontrer que si, pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) = g(x)$ , alors  $f = g$ .

## Exercices

**440.5**

Justifier que :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 + 1 < x^3 - y^4\}$$

est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^2$ .

**440.6**

Représenter

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et montrer que  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

**440.7**

On considère :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq \text{Arctan}(x)\}$$

Montrer que  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

**440.8**

On considère :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \sin(x)\}$$

Est-ce que  $A$  est fermé ? borné ?

**440.9**

Montrer que :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

n'a pas de limite lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

**440.10**

Étudier la limite en  $(0, 0)$  de :

$$(a) \ f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(b) \ g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \ h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x - y}$$

## Petits problèmes d'entraînement

**440.11** 

(a) Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que le graphe de  $f$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Donner un exemple de fonction discontinue dont le graphe est fermé.

(c) Montrer que si  $f$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$  et que son graphe est fermé, alors  $f$  est continue.

**440.12**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

- (a) On note  $P_n = \frac{1}{2^n} X^n$ . Déterminer la limite de la suite  $(P_n)_n$ .
- (b) Justifier que l'application  $\varphi : P \mapsto P(2)$  est linéaire, mais non continue sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- (c) Montrer que l'ensemble  $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(2) = 0\}$  est une partie dense de  $\mathbb{R}[X]$ .

**440.13**

Soit  $E$  un espace normé, et  $f : x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|^2}$ .

- (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $E$ .
- (b) Montrer que  $f(E) = \text{BF}(0, \frac{1}{2})$ .

**440.14**

Utiliser une application continue pour montrer que  $\mathbb{Z}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**440.15**

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0, y) = y$ .

En utilisant  $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ , montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**440.16**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_1$  et on note :

$$f : (x, y) \mapsto (ax, by)$$

Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

**440.17**

- (a) Montrer que  $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$  n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .
- (b) Pour  $A \subset \mathbb{R}$ , déterminer l'ensemble des points où  $\mathbb{1}_A$  est continue.

**440.18**

Soit  $n$  un entier non nul, et :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \text{ liée}\}$$

- (a) On considère  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que :

$$(x, y) \text{ libre} \iff \exists i, j \in \{1, \dots, n\}, \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \neq 0$$

- (b) En déduire que  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

**440.19**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et surjective. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = 0$  est un fermé de cardinal infini.

**440.20**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application continue entre deux espaces normés. Montrer que, si  $A$  est dense dans  $E$ , alors  $f(A)$  est dense dans  $f(E)$ .