Limite, continuité dans un espace vectoriel normé

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, E et F désigne deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Limite

1.1 Définition, propriétés

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que f **a pour limite** b **en** a, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition. La limite de f en a, si elle existe, est unique.

Proposition. L'existence et la valeur de la limite sont inchangées par passage à d'autres normes sur E et F, lorsqu'elles sont équivalentes aux normes initiales.

Remarque. *On peut reformuler la définition en termes de boules.* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ *signifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A \cap BF(a, \eta),\ f(x) \in BF(b, \varepsilon)$$

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $\|x\| \to +\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} 0_F$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\| \geqslant M \implies \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

1.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. f a pour limite b en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b.

1.3 Cas particulier de $\mathbb{R}$

Remarque. *Lorsque* $E = \mathbb{R}$ *on peut envisager les limites lorsque* $x \to \pm\infty$*, et lorsque* $F = \mathbb{R}$*, on peut envisager des limites infinies, même s'il serait abusif de dire que* $+\infty$ *est adhérent à* $]-\infty, +\infty[$*. On peut donc adapter les définitions vues en première année.*

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction de la variable réelle, où A n'est pas majorée. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Définition. Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$$

1.4 Opérations sur les limites

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b + \mu c$.

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda$, alors $(\varphi f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$ et λ bornée au voisinage de a, on écrit :

$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant M \|f(x)\| \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

  pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.
- Si f est bornée au voisinage de a, $\lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{K}}$, on écrit :

$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant \|\lambda(x)\| M \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

  pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to \mathbb{K}$ deux fonctions numériques et $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(f \times g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \times c$.

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

1.5 Limite par coordonnées, limite des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x) f_1 + g_2(x) f_2 + \cdots + g_p(x) f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction numérique g_k est la **k-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, et avec $\ell \in F$ dont les coordonnées sont $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\},\ g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans $\mathbb{K}$.*

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \dots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
Pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\},\ g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans les espaces F_k.*

2 Continuité

2.1 Définition

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque. *La continuité en un point est une propriété locale.*

2.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires et $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur A).
- Si f et φ sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\varphi f : x \mapsto \varphi(x)f(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to K$ deux fonctions numériques.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$.

- Si f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) et g est continue en $f(A)$ (resp. sur $f(A)$), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur A).

2.4 Continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \cdots + g_p(x)f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction numérique g_k est la **k-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

> Avec les notations précédentes, g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications coordonnées g_k sont continues en a.

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \dots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
La fonction g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications composantes g_k sont continues en a.

2.5 Continuité et densité

Théorème.

Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux applications. Si :

- f et g sont continues sur A,
- $\forall x \in D \subset A,\ f(x) = g(x)$,
- D est dense dans A,

alors :

- $f = g$ i.e. $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Remarque. *Ainsi, pour montrer une propriété « continue » sur un ensemble, il suffit de la montrer sur une partie dense de cet ensemble.*

2.6 Fonctions lipschitziennes, uniformément continues

Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **lipschitzienne** sur A si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\|y - x\|_E$$

Proposition. Soit $A \subset E$, avec $A \neq \varnothing$. Alors l'application : $\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **uniformément continue** sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|y - x\|_E \leqslant \eta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition.

- Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.
- Les applications uniformément continues sont continues.

3 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue

Théorème.

Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue. Alors l'image réciproque par f d'un ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) relatif de A :

- Si X est ouvert, $f^{-1}(X)$ est un ouvert de A
- Si X est fermé, $f^{-1}(X)$ est un fermé de A

Proposition. Soit f et g deux fonctions continues sur A, à valeurs réelles. Alors, pour tout réel λ :

$$\begin{array}{l} \{x \in A,\ f(x) = g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) = \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A,\ f(x) \leqslant g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) \leqslant \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A,\ f(x) < g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) < \lambda\} \text{ sont des ouverts de } A \end{array}$$

4 Annexes

4.1 Annexe : unification des définitions à l'aide des voisinages

Définition. Si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, on appelle **voisinage de $+\infty$ dans A** toute partie $V \subset A$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$]M, +\infty[\cap A \subset V$$

Remarque. *Rappelons que, pour $a \in \mathbb{R}$, un **voisinage relatif de a dans A** est toute partie V de A telle qu'il existe $\eta > 0$ satisfaisant :*

$$]a - \eta, a + \eta[\cap A \subset V$$

On note $\mathcal{V}_A(a)$ l'ensemble des voisinages relatifs de a dans A.

Proposition. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{A} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists W \in \mathcal{V}_A(a),\ f(W) \subset V$$

4.2 Annexe : limite suivant une partie

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in \overline{A}$.

On considère B une partie A, telle que a soit adhérent à B. La **limite de f en a suivant B** est, si elle existe, la limite en a de la restriction $f_{|B}$:

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in B}]{} \ell$$

$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in B,$$

$$\|x - a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon\Big)$$

Exemple. Si $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ est une fonction de la variable réelle, on appelle **limite à droite en a** la limite de f en A suivant $A \cap]a, +\infty[$, et si ℓ est cette limite, on note :

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ >}]{} \ell$$

en évitant soigneusement toute notation avec un symbole + en exposant, trop ambigu.

Exercices et résultats classiques à connaître

Continuité de la distance à une partie

440.1

Soit A une partie non vide de E espace normé. Montrer que l'application :

$$x \mapsto d(x, A)$$

est continue sur E.

Une équation fonctionnelle

440.2

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

Une application linéaire 1-lipschitzienne

440.3

Soit E un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercices du CCINP

440.4 35

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.

   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.

   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercices

440.5

Justifier que :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 + 1 < x^3 - y^4\}$$

est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

440.6

Représenter

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

et montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

440.7

On considère :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant \operatorname{Arctan}(x)\}$$

Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

440.8

On considère :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \sin(x)\}$$

Est-ce que A est fermé ? borné ?

440.9

Montrer que :

$$f \,:\, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

n'a pas de limite lorsque $(x, y) \to (0, 0)$.

440.10

Étudier la limite en $(0, 0)$ de :

(a) $f \,:\, (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

(b) $g \,:\, (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(c) $h \,:\, (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x - y}$

Petits problèmes d'entrainement

440.11

(a) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner un exemple de fonction discontinue dont le graphe est fermé.

(c) Montrer que si f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et que son graphe est fermé, alors f est continue.

440.12 ✍

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

(a) On note $P_n = \dfrac{1}{2^n}X^n$. Déterminer la limite de la suite $(P_n)_n$.

(b) Justifier que l'application $\varphi\ :\ P \mapsto P(2)$ est linéaire, mais non continue sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(2) = 0\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}[X]$.

440.13

Soit E un espace normé, et $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|^2}$.

(a) Montrer que f est continue sur E.

(b) Montrer que $f(E) = \mathrm{BF}(0, \frac{1}{2})$.

440.14

Utiliser une application continue pour montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

440.15

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$.

En utilisant $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

440.16

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto (ax, by)$$

Montrer que f est lipschitzienne.

440.17

(a) Montrer que $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

(b) Pour $A \subset \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des points où $\mathbb{1}_A$ est continue.

440.18

Soit n un entier non nul, et :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ (x,y) \text{ liée }\}$$

(a) On considère $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$(x,y) \text{ libre} \iff \exists i,j \in \{1,\ldots,n\},\ \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \neq 0$$

(b) En déduire que A est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

440.19

Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est un fermé de cardinal infini.

440.20

Soit $f\ :\ E \to F$ une application continue entre deux espaces normés. Montrer que, si A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

440.21

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit sur $\mathbb{R}^2$:

$$F\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

440.22

Soit $f\ :\ E \to F$ une application entre deux espaces normés. Montrer l'équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(iii) $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;

(iv) $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(\mathring{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}$;