

Continuité des applications linéaires, multilinéaires

Cours	2
1 Continuité des applications linéaires	2
1.1 Caractérisation	2
1.2 Cas où E est de dimension finie	2
1.3 Norme subordonnée	2
1.4 Adaptation matricielle	3
2 Continuité des applications multilinéaires	3
2.1 Caractérisation	3
2.2 Applications polynomiales sur un espace de dimension finie	3
2.3 Applications multilinéaires en dimension finie	3
3 Annexes	4
3.1 Annexe : d'autres caractérisations de la continuité des applications linéaires	4
3.2 Annexe : continuité des applications multilinéaires en dimension finie	4
3.3 Annexe : un peu de topologie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	5
Exercices	7
Exercices et résultats classiques à connaître	7
Autour de la continuité de \det	7
Hyperplan d'un espace normé	7
Une application linéaire continue et non continue	7
Exercices du CCINP	8
Exercices	9
Petits problèmes d'entraînement	9

1 Continuité des applications linéaires

1.1 Caractérisation

Théorème.

Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue si et seulement si :

$$\exists C \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|$$

Remarque. Ce résultat est très important, car il convient de savoir y faire référence dès que la question posée est celle de la continuité d'une application qui est linéaire.

Notation. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

1.2 Cas où E est de dimension finie

Théorème.

Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, alors u est continue.

Corollaire. Soit E un espace vectoriel normé de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **application coordonnée** :

$$\begin{aligned} \pi_i : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto x_i \end{aligned}$$

où (x_1, \dots, x_n) est le n -uplet des coordonnées de x dans \mathcal{B} .

Les applications coordonnées sont continues.

1.3 Norme subordonnée

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose :

$$\|u\|_{\text{op}} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

que l'on appelle **norme d'opérateur** ou **norme subordonnée** aux deux normes fixées sur E et F .

Remarque. On utilise aussi la notation $\|u\|_{\text{op}} = \|u\|$.

Théorème.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.
 $\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Proposition. Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors :

- $\|u\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$
- $\|u\|_{\text{op}}$ est le plus petit $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors :

- $\|v \circ u\|_{\text{op}} \leq \|v\|_{\text{op}} \|u\|_{\text{op}}$

Corollaire. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ qui vérifie :

- $\|\text{Id}_E\|_{\text{op}} = 1$
- $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E), \|v \circ u\|_{\text{op}} \leq \|v\|_{\text{op}} \|u\|_{\text{op}}$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E), \forall k \in \mathbb{N}, \|u^k\|_{\text{op}} \leq \|u\|_{\text{op}}^k$

On dit que $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une **norme d'algèbre unitaire**.

1.4 Adaptation matricielle

Proposition. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

- $\|I_n\| = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$

2 Continuité des applications multilinéaires

2.1 Caractérisation

Proposition. Soit E_1, \dots, E_p, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application multilinéaire. Alors f est continue si et seulement si :

$$\exists C \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$$

Corollaire. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, alors le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

2.2 Applications polynomiales sur un espace de dimension finie

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, on définit l'application :

$$m_{(k_1, \dots, k_n)} = \pi_1^{k_1} \pi_2^{k_2} \dots \pi_n^{k_n} : x \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le n -uplet des coordonnées de x dans \mathcal{B} .

On appelle **application polynomiale sur E** toute application $: E \rightarrow \mathbb{K}$ qui est combinaison linéaire des $m_{(k_1, \dots, k_n)}$.

Remarque. Le fait qu'une application soit polynomiale ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} .

Proposition. Toute application polynomiale sur un espace de dimension finie est continue.

Exemple. L'application \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 Applications multilinéaires en dimension finie

Proposition. Soit E_1, \dots, E_p, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

S'ils sont de dimensions finies, toute application multilinéaire $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est continue.

Exemple. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et \mathcal{B} une base de E . Alors $\det_{\mathcal{B}}$ est continue sur E^n .

3 Annexes

3.1 Annexe : d'autres caractérisations de la continuité des applications linéaires

Théorème.

Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|$$

(ii) u est bornée sur la boule unité $BF(0_E, 1)$

(iii) u est bornée sur la sphère unité $S(0_E, 1)$

(iv) u est lipschitzienne sur E

(v) u est uniformément continue sur E

(vi) u est continue sur E

(vii) u est continue en 0_E

Preuve.

$$(i) \implies (ii)$$

Pour tout $x \in BF(0_E, 1)$:

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq C\|x\| \text{ par (i)} \\ &\leq C \text{ indépendant de } x \end{aligned}$$

donc u est bornée sur $BF(0_E, 1)$.

$$(ii) \implies (iii)$$

Immédiat, car $S(0_E, 1) \subset BF(0_E, 1)$.

$$(iii) \implies (iv)$$

Par hypothèse, il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall z \in S(0_E, 1), \|u(z)\| \leq C$$

Soit $x, y \in E$, avec $x \neq y$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\|u(y) - u(x)\|_F}{\|y - x\|_E} &= \frac{1}{\|y - x\|_E} \|u(y - x)\|_F \\ &\quad \text{par linéarité de } u \\ &= \left\| \frac{1}{\|y - x\|_E} u(y - x) \right\|_F \\ &\quad \text{et homogénéité de la norme} \\ &= \left\| u \left(\frac{y - x}{\|y - x\|_E} \right) \right\|_F \\ &\quad \text{par linéarité de } u \\ &\leq C \text{ car } \frac{y - x}{\|y - x\|_E} \in S(0_E, 1) \end{aligned}$$

et donc u est lipschitzienne.

$$(iv) \implies (v) \implies (vi) \implies (vii)$$

Ces implications sont claires.

$$(vii) \implies (i)$$

On applique la définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, en notant que $u(0_E) = 0_F$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, x \in BF(0_E, \alpha) \implies \|u(x)\|_F \leq 1$$

Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\alpha \frac{x}{\|x\|_E} \in BF(0_E, \alpha)$

donc :

$$\left\| u \left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq 1$$

c'est-à-dire, par linéarité de u et homogénéité de la norme :

$$\frac{\alpha}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F \leq 1$$

et donc, en posant $C = \frac{1}{\alpha}$:

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

cette inégalité étant triviale pour $x = 0_E$. □

3.2 Annexe : continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Proposition. Soit E_1, \dots, E_p, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application multilinéaire. Si E_1, \dots, E_p sont de dimensions finies, alors f est continue.

Preuve.

- Si F est de dimension finie, il suffit de dire que les applications coordonnées de f sont toutes polynomiales sur un espace de dimension finie, donc continues, et donc f est continue.
- Dans le cas où F est quelconque, on traite le cas où $p = 2$, ce qui ne change pas le principe de la démonstration. On considère $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire, avec E_1 et E_2 de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_1 = (e_1^1, \dots, e_{n_1}^1)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_1^2, \dots, e_{n_2}^2)$ des bases de E_1 et E_2 respectivement. On munit E_1 de la norme :

$$\|x_1\|_{E_1} = \text{Max}_{i=1}^{n_1} |x_i^1|$$

où $(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1)$ sont les coordonnées de x_1 dans \mathcal{B}_1 . On munit E_2 de la norme $\|\cdot\|_{E_2}$ définie de la même manière. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, avec x_1 de coordonnées $(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1)$ et x_2 de coordonnées $(x_2^1, \dots, x_{n_2}^2)$. On a

alors :

$$\begin{aligned} \|f(x_1, x_2)\|_F &= \left\| f \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 e_i^1, \sum_{j=1}^{n_2} x_j^2 e_j^2 \right) \right\|_F \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_i^1 x_j^2 f(e_i^1, e_j^2) \right\|_F \\ &\quad \text{par multilinéarité} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |x_i^1| |x_j^2| \|f(e_i^1, e_j^2)\|_F \\ &\quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} \|f(e_i^1, e_j^2)\|_F \\ &\quad \text{par déf. de } \|\cdot\|_{E_1} \text{ et } \|\cdot\|_{E_2} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|f(e_i^1, e_j^2)\|_F \right)}_{\text{notée } C} \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} \\ &= C \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} \end{aligned}$$

ce qui justifie la continuité de f . □

3.3 Annexe : un peu de topologie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Rien de ce paragraphe n'est au programme, mais il est bon d'avoir réfléchi aux questions de topologie dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelle norme ?

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi la topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (voisinages, ouverts, fermés, bornés, convergence etc.) ne dépend pas du choix de la norme. On connaît bien, pour $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{i,j} |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\text{tr}(\bar{A}^\top A)} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \\ \|A\|_\infty &= \text{Max}_{i,j} |a_{ij}| \end{aligned}$$

mais on préférera en général utiliser une « norme d'algèbre », c'est-à-dire une norme satisfaisant :

$$N(I_n) = 1 \text{ et } N(AB) \leq N(A)N(B) \quad \forall A, B$$

Pour cela, il suffit de choisir une norme d'opérateur subordonnée à une norme choisie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Faisant ce choix, il n'est pas nécessaire d'explicitier cette norme d'opérateur.

Exemple. Déterminer la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_1$.

Solution.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on note $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on cherche $\|A\|$, c'est-à-dire le plus petit k tel que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \|AX\|_1 \leq k\|X\|_1$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n |[AX]_i| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ &\leq k \sum_{j=1}^n |x_j| \text{ en posant } k = \text{Max}_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ &= k\|X\|_1 \end{aligned}$$

Notons alors j_0 un indice tel que $k = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$. Avec $X = E_{j_0,1}$ (i.e. $x_j = \delta_{j,j_0}$), il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes, donc k est le plus petit possible et :

$$\|A\| = \text{Max}_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

□

Quelques propriétés topologiques

Résultat. \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve.

M1 On dit simplement que, par la formule :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

le déterminant est polynomial en les coefficients de A , donc continu en les coefficients de A , donc en A .

M2 On note $C_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'application qui associe à une matrice A sa k -ième colonne $C_k(A)$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \\ A & \mapsto & (C_1(A), \dots, C_n(A)) \end{array}$$

est continue car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, et :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto & \det_{\text{canonique}}(C_1, \dots, C_n) \end{array}$$

est continue car multilinéaire sur $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n$ qui est de dimension finie.

Le déterminant, qui est la composition de ces deux applications, est donc continu. \square

Résultat. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. On a $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. \square

Résultat. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la suite de terme général $M_p = A - \frac{1}{p}I_n$. Alors $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ et :

$$\begin{aligned} \det(M_p) &= \det\left(A - \frac{1}{p}I_n\right) \\ &= (-1)^n \chi_A\left(\frac{1}{p}\right) \\ &\neq 0 \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

car χ_A n'a qu'un nombre fini de racines. \square

Exercices et résultats classiques à connaître**Autour de la continuité de \det** **45.1**

- (a) Montrer que \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (b) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (c) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Hyperplan d'un espace normé**45.2**

Soit E un espace normé. Montrer que tout hyperplan de E est dense ou fermé.

Une application linéaire continue et non continue**45.3**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall t \in [0, 1], u(f)(t) = f(t) - f(0)$$

- (a) Montrer que u est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) Montrer que u n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- (c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Exercices du CCINP

45.4

1.2

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $u : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$

Prouver que u est une application continue sur E .

(b) On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

45.5

36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps \mathbb{R} .

On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$. On considère l'application

φ de E dans \mathbb{R} définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

45.6

38

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

$$\text{Soit } u : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{matrix} \text{ avec } \forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admet que u est un endomorphisme de E .

Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet **non nul, fixé**.

$$\text{Soit } u : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{matrix}$$

(a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur \mathbb{R}^n .

(b) On munit \mathbb{R}^n de $\|\cdot\|_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 =$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Calculer $\|u\|$.

(c) On munit \mathbb{R}^n de $\|\cdot\|_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Calculer $\|u\|$.

3. Déterminer un espace vectoriel E , une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

45.7

39.2

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 . On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans \mathbb{R} .

45.8

 54.23

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

(b) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que f est continue sur E .

Exercices

45.9

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

45.10

Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

45.11

Montrer la continuité de l'application inverse définie sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$M \mapsto M^{-1}$$

45.12

Soit E un espace normé. Que vaut $\|\text{Id}_E\|$?

45.13

On munit $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Calculer :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|$$

45.14

On considère $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$, et $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme N où $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Pour $f \in E$, on définit :

$$\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que φ est une application linéaire continue de $E \rightarrow F$, et calculer $\|\varphi\|$.

45.15


- (a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit :

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), X^\top AX \geq 0\}$$


- (b) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Petits problèmes d'entraînement

45.16 

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (a) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
(b) Déterminer l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

45.17 

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

45.18

Est-ce que l'application $f \mapsto f(0)$ est continue sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$

- lorsque l'on munit cet espace de $\|\cdot\|_\infty$?
- lorsque l'on munit cet espace de $\|\cdot\|_1$?

45.19

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

(a) On note :

$$A = \{f \in E, \int_0^1 f(t) dt \geq 0\}$$

Montrer que A est fermé pour $\|\cdot\|_1$.
L'est-il pour $\|\cdot\|_\infty$?

(b) On note :

$$B = \{f \in E, f(0) > 0\}$$

Montrer que B est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
L'est-il pour $\|\cdot\|_1$?

45.20

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice notée P .

Montrer que P et A commutent et que P est une matrice de projection.

45.21

On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme définie par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

On considère l'opérateur :

$$\begin{aligned} \Delta : \ell^\infty &\rightarrow \ell^\infty \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où } y_n = x_{n+1} - x_n \end{aligned}$$

Montrer que Δ est linéaire et continue.

45.22

Calculer $\|\text{tr}\|$ lorsque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_2$, resp. $\|\cdot\|_\infty$).

45.23

On considère $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $f \in E$, on définit :

$$\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$$

- (a) Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E .
(b) Calculer $\|\varphi\|$.

45.24

Montrer que l'application $M \mapsto \text{Com}(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

45.25

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(A_k)_k$ une suite de matrices qui convergent vers A .
On suppose que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{rg}(A_k) = p$$

Montrer que $\text{rg}(A) \leq p$.

- (b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur à p est fermé.

45.26

(a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{lcl} u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \rightarrow & \chi_A \end{array}$$

est continue.

(b) L'application :

$$\begin{array}{lcl} u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \rightarrow & \pi_A \end{array}$$

est-elle continue ?

45.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$. Calculer :

$$\det(\text{Com}(A))$$