Continuité des applications linéaires, multilinéaires

1 Continuité des applications linéaires

1.1 Caractérisation

Théorème.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue si et seulement si :

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

Remarque. *Ce résultat est très important, car il convient de savoir y faire référence dès que la question posée est celle de la continuité d'une application qui est linéaire.*

Notation. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

1.2 Cas où E est de dimension finie

Théorème.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, alors u est continue.

Corollaire. Soit E un espace vectoriel normé de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle **application coordonnée** :

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x_i \end{array}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
Les applications coordonnées sont continues.

1.3 Norme subordonnée

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose :

$$\|u\|_{\text{op}} = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

que l'on appelle **norme d'opérateur** ou **norme subordonnée** aux deux normes fixées sur E et F.

Remarque. *On utilise aussi la notation* $\|u\|_{\text{op}} = |||u|||$.

Théorème.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
$\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Proposition. Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors :

- $\|u\|_{\text{op}} = \operatorname*{Sup}_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$
- $\|u\|_{\text{op}}$ est le plus petit $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors :

- $\|v \circ u\|_{\text{op}} \leqslant \|v\|_{\text{op}} \|u\|_{\text{op}}$

Corollaire. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ qui vérifie :

- $\|\text{Id}_E\|_{\text{op}} = 1$
- $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|v \circ u\|_{\text{op}} \leqslant \|v\|_{\text{op}} \|u\|_{\text{op}}$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|u^k\|_{\text{op}} \leqslant \|u\|_{\text{op}}^k$

On dit que $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une **norme d'algèbre unitaire**.

1.4 Adaptation matricielle

Proposition. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$|||A||| = \operatorname*{Sup}_{\substack{X\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \operatorname*{Sup}_{\|X\|=1} \|AX\|$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

- $|||I_n||| = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|||A^k||| \leqslant |||A|||^k$

2 Continuité des applications multilinéaires

2.1 Caractérisation

Proposition. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application multilinéaire. Alors f est continue si et seulement si :

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant C\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$$

Corollaire. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, alors le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

2.2 Applications polynomiales sur un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, on définit l'application :

$$m_{(k_1,\dots,k_n)} = \pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\dots\pi_n^{k_n} \ :\ x \mapsto x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
On appelle **application polynomiale sur** E toute application : $E \to \mathbb{K}$ qui est combinaison linéaire des $m_{(k_1,\dots,k_n)}$.

Remarque. *Le fait qu'une application soit polynomiale ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.*

Proposition. Toute application polynomiale sur un espace de dimension finie est continue.

Exemple. L'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 Applications multilinéaires en dimension finie

Proposition. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
S'ils sont de dimensions finies, toute application multilinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.

Exemple. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\det_{\mathcal{B}}$ est continue sur E^n.

3 Annexes

3.1 Annexe : d'autres caractérisations de la continuité des applications linéaires

Théorème.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

(ii) u est bornée sur la boule unité $BF(0_E, 1)$

(iii) u est bornée sur la sphère unité $S(0_E, 1)$

(iv) u est lipschitzienne sur E

(v) u est uniformément continue sur E

(vi) u est continue sur E

(vii) u est continue en 0_E

Preuve.

$\boxed{(i) \implies (ii)}$

Pour tout $x \in BF(0_E, 1)$:

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &\leqslant C\|x\| \text{ par } (i)\\ &\leqslant C \text{ indépendant de } x\end{aligned}$$

donc u est bornée sur $BF(0_E, 1)$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$

Immédiat, car $S(0_E, 1) \subset BF(0_E, 1)$.

$\boxed{(iii) \implies (iv)}$

Par hypothèse, il existe $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall z \in S(0_E, 1),\ \|u(z)\| \leqslant C$$

Soit $x, y \in E$, avec $x \neq y$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\|u(y) - u(x)\|_F}{\|y - x\|_E} &= \frac{1}{\|y - x\|_E}\|u(y - x)\|_F\\ &\quad \text{par linéarité de } u\\ &= \left\|\frac{1}{\|y - x\|_E}u(y - x)\right\|_F\\ &\quad \text{et homogénéité de la norme}\\ &= \left\|u\left(\frac{y - x}{\|y - x\|_E}\right)\right\|_F\\ &\quad \text{par linéarité de } u\\ &\leqslant C \text{ car } \frac{y - x}{\|y - x\|_E} \in S(0_E, 1)\end{aligned}$$

et donc u est lipschitzienne.

$\boxed{(iv) \implies (v) \implies (vi) \implies (vii)}$

Ces implications sont claires.

$\boxed{(vii) \implies (i)}$

On applique la définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, en notant que $u(0_E) = 0_F$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ x \in BF(0_E, \alpha) \implies \|u(x)\|_F \leqslant 1$$

Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\alpha\dfrac{x}{\|x\|_E} \in BF(0_E, \alpha)$ donc :

$$\left\|u\left(\alpha\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leqslant 1$$

c'est-à-dire, par linéarité de u et homogénéité de la norme :

$$\frac{\alpha}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F \leqslant 1$$

et donc, en posant $C = \dfrac{1}{\alpha}$:

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

cette inégalité étant triviale pour $x = 0_E$.

□

3.2 Annexe : continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Proposition. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ une application multilinéaire. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, alors f est continue.

Preuve.

- Si F est de dimension finie, il suffit de dire que les applications coordonnées de f sont toutes polynomiales sur un espace de dimension finie, donc continues, et donc f est continue.
- Dans le cas où F est quelconque, on traite le cas où $p = 2$, ce qui ne change pas le principe de la démonstration.
  On considère $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire, avec E_1 et E_2 de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_1 = (e_1^1, \dots, e_{n_1}^1)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_1^2, \dots, e_{n_2}^2)$ des bases de E_1 et E_2 respectivement.
  On munit E_1 de la norme :
  $$\|x_1\|_{E_1} = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n_1} |x_i^1|$$
  où $(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1)$ sont les coordonnées de x_1 dans $\mathcal{B}_1$. On munit E_2 de la norme $\|\cdot\|_{E_2}$ définie de la même manière. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, avec x_1 de coordonnées $(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1)$ et x_2 de coordonnées $(x_1^2, \dots, x_{n_2}^2)$. On a

alors :

$$\begin{aligned}
\|f(x_1,x_2)\|_F &= \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 e_i^1, \sum_{j=1}^{n_2} x_j^2 e_j^2\right)\right\|_F \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} x_i^1 x_j^2 f(e_i^1,e_j^2)\right\|_F \\
&\quad \text{par multilinéarité} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} |x_i^1|\,|x_j^2|\,\left\|f(e_i^1,e_j^2)\right\|_F \\
&\quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \|x_1\|_{E_1}\,\|x_2\|_{E_2}\,\left\|f(e_i^1,e_j^2)\right\|_F \\
&\quad \text{par déf. de } \|\cdot\|_{E_1} \text{ et } \|\cdot\|_{E_2} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \left\|f(e_i^1,e_j^2)\right\|_F\right)}_{\text{notée } C} \|x_1\|_{E_1}\,\|x_2\|_{E_2} \\
&= C\,\|x_1\|_{E_1}\,\|x_2\|_{E_2}
\end{aligned}$$

ce qui justifie la continuité de f.

□

3.3 Annexe : un peu de topologie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Rien de ce paragraphe n'est au programme, mais il est bon d'avoir réfléchi aux questions de topologie dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelle norme ?

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi la topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (voisinages, ouverts, fermés, bornés, convergence etc.) ne dépend pas du choix de la norme. On connaît bien, pour $A=(a_{ij})_{ij}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(\overline{A}^\top A)} = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_\infty = \operatorname*{Max}_{i,j}|a_{ij}|$$

mais on préfèrera en général utiliser une « norme d'algèbre », c'est-à-dire une norme satisfaisant :

$$N(I_n)=1 \text{ et } N(AB)\leqslant N(A)N(B)\ \ \forall A,B$$

Pour cela, il suffit de choisir une norme d'opérateur subordonnée à une norme choisie sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Faisant ce choix, il n'est pas nécessaire d'expliciter cette norme d'opérateur.

Exemple. Déterminer la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_1$.

Solution.

Pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on note $\|X\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$.

Considérons $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on cherche $|||A|||$, c'est-à-dire le plus petit k tel que :

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ \|AX\|_1\leqslant k\|X\|_1$$

Pour $X\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n |[AX]_i| \\
&= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|\right) \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j|\left(\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\right) \\
&\leqslant k\sum_{j=1}^n|x_j| \quad \text{en posant } k=\operatorname*{Max}_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}| \\
&= k\|X\|_1
\end{aligned}$$

Notons alors j_0 un indice tel que $k=\sum_{i=1}^n|a_{ij_0}|$. Avec $X=E_{j_0 1}$ (i.e. $x_j=\delta_{jj_0}$), il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes, donc k est le plus petit possible et :

$$|||A||| = \operatorname*{Max}_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$$

□

Quelques propriétés topologiques

Résultat. det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve.

$\boxed{\text{M1}}$ On dit simplement que, par la formule :

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

le déterminant est polynomial en les coefficients de A, donc continu en les coefficients de A, donc en A.

$\boxed{\text{M2}}$ On note $C_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ l'application qui associe à une matrice A sa k-ième colonne $C_k(A)$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \left(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^n \\ A & \mapsto & (C_1(A), \ldots, C_n(A)) \end{array}$$

est continue car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, et :

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^n & \to & \mathbb{K} \\ (C_1, \ldots, C_n) & \mapsto & \det_{\text{canonique}}(C_1, \ldots, C_n) \end{array}$$

est continue car multilinéaire sur $\left(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^n$ qui est de dimension finie.
Le déterminant, qui est la composition de ces deux applications, est donc continu.

□

Résultat. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. □

Résultat. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la suite de terme général $M_p = A - \frac{1}{p} I_n$. Alors $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ et :

$$\begin{aligned} \det(M_p) &= \det(A - \frac{1}{p} I_n) \\ &= (-1)^n \chi_A(\frac{1}{p}) \\ &\neq 0 \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

car χ_A n'a qu'un nombre fini de racines. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Autour de la continuité de $\det$

45.1

(a) Montrer que $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Hyperplan d'un espace normé

45.2

Soit E un espace normé. Montrer que tout hyperplan de E est dense ou fermé.

Une application linéaire continue et non continue

45.3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall t \in [0,1],\ u(f)(t) = f(t) - f(0)$$

(a) Montrer que u est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que u n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elle équivalentes ?

Exercices du CCINP

45.4 CCINP **1.2**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Sup}} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   (a) Soit u : $\left\{\begin{array}{lcl} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}\right.$
   Prouver que u est une application continue sur E.

   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
   Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

45.5 CCINP **36**

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $||\ ||_E$ (respectivement $||\ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Sup}} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

45.6 CCINP **38**

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit u : $\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x\ \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit u : $\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\max} |x_k|$.
   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

45.7 CCINP **39.2**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

45.8 **54.23**

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

Exercices

45.9

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

45.10

Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

45.11

Montrer la continuité de l'application inverse définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$M \mapsto M^{-1}$$

45.12

Soit E un espace normé. Que vaut $|||\mathrm{Id}_E|||$?

45.13

On munit $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Calculer :

$$|||\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}|||$$

45.14

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme N où $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Pour $f \in E$, on définit :

$$\varphi(f)\ :\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est une application linéaire continue de $E \to F$, et calculer $|||\varphi|||$.

45.15

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit :

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^\top A X \geqslant 0\}$$

(b) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Petits problèmes d'entrainement

45.16 ✍

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

45.17 ✍

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

45.18

Est-ce que l'application $f \mapsto f(0)$ est continue sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K})$

- lorsque l'on munit cet espace de $\|\cdot\|_\infty$?
- lorsque l'on munit cet espace de $\|\cdot\|_1$?

45.19

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

(a) On note :

$$A = \{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\}$$

Montrer que A est fermé pour $\|\cdot\|_1$.
L'est-il pour $\|\cdot\|_\infty$?

(b) On note :

$$B = \{f \in E,\ f(0) > 0\}$$

Montrer que B est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
L'est-il pour $\|\cdot\|_1$?

45.20

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice notée P.
Montrer que P et A commutent et que P est une matrice de projection.

45.21

On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme définie par :

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

On considère l'opérateur :

$$\begin{array}{rccl} \Delta: & \ell^\infty & \to & \ell^\infty \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } y_n = x_{n+1} - x_n \end{array}$$

Montrer que Δ est linéaire et continue.

45.22

Calculer $|\!|\!| \operatorname{tr} |\!|\!|$ lorsque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_2$, resp. $\|\cdot\|_\infty$).

45.23

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $f \in E$, on définit :

$$\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E.

(b) Calculer $|\!|\!|\varphi|\!|\!|$.

45.24

Montrer que l'application $M \mapsto \operatorname{Com}(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

45.25

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(A_k)_k$ une suite de matrices qui convergent vers A. On suppose que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{rg}(A_k) = p$$

Montrer que $\operatorname{rg}(A) \leqslant p$.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur à p est fermé.

45.26

(a) Montrer que l'application :

$$u\ :\ \begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X]\\ A & \to & \chi_A\end{array}$$

est continue.

(b) L'application :

$$u\ :\ \begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X]\\ A & \to & \pi_A\end{array}$$

est-elle continue ?

45.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geqslant 2$. Calculer :

$$\det\big(\operatorname{Com}(A)\big)$$

45.28

Soit $a > 0$ et E l'espace des fonctions $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues et intégrables sur $[0, +\infty[$. On munit E de la norme définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Pour $f \in E$, on définit :

$$\phi(f)\ :\ x \in [0, +\infty[\mapsto \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E.

45.29

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $D\ :\ P \mapsto P'$.

(a) Déterminer une norme sur E pour laquelle D n'est pas continue.

(b) Déterminer une norme sur E pour laquelle D est continue.

45.30

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et U l'ensemble des polynômes de degré n, scindés à racines simples. Montrer que U est un ouvert de E.

45.31

On pourra, dans cet exercice, utiliser librement le fait que l'ensemble des matrices inversibles, et celui des matrices diagonalisables, sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est continu.

(b) Montrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(c) Montrer le théorème de Cayley-Hamilton : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

45.32

Soit n un entier non nul. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne usuelle :

$$\|M\| = \sqrt{\operatorname{tr} M^\top M}$$

et on rappelle que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|MN\| \leqslant \|M\|\,\|N\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ fixée, et :

$$f\ :\ M \mapsto 2M - MAM$$

On considère la suite définie par récurrence en posant :

$$M_0 \text{ quelconque et } \forall k \in \mathbb{N},\ M_{k+1} = f(M_k)$$

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, établir une relation simple entre $I_n - AM_{k+1}$ et $I_n - AM_k$.

On suppose dorénavant que $\|I_n - AM_0\| < 1$.

(b) Montrer que A est inversible.

(c) Montrer que $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A^{-1}$.

45.33

(a) Montrer que, pour $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'ensemble des matrices de rang r n'est ni ouvert, ni fermé, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle que le rang d'une matrice A est $\geqslant r$ si et seulement s'il existe I et J de cardinal r tels que $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est inversible.

(b) Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(A) \geqslant r\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

45.34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire une formule donnant le coefficient de degré 1 de χ_A en fonction de la trace de la comatrice de A.
On commencera par envisager le cas où A est inversible.