Compacité

Cours 2

Exercices 7

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 Suites extraites, valeurs d'adhérence d'une suite

1.1 Suites extraites

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un ensemble X. On dit que v **est extraite de** u lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

L'application φ s'appelle **extractrice**.

Exemple. En posant $v_n = u_{2n}$, on définit la suite extraite de $(u_n)_n$ des termes d'indices pairs. Ici, $\varphi : n \mapsto 2n$.

Remarque. *Si $(u_{\varphi(n)})_n$ est extraite de $(u_n)_n$, et que ψ désigne une autre extractrice, la suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_n$ est-elle :*

$$(u_{\psi\circ\varphi(n)})_n \text{ ou } (u_{\varphi\circ\psi(n)})_n\ ?$$

Proposition. Si φ est une extractrice, c'est-à-dire une application : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

1.2 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $a \in E$. On dit que a **est une valeur d'adhérence de** $(u_n)_n$ si et seulement s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers a.

Exemple. Les valeurs 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos \frac{n\pi}{2}\right)_n$.

Proposition. On conserve les notations de la définition. Alors a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(*i*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini ;

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non majoré ;

(*iii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \{n \geqslant p,\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non vide.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_n$ est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite.

Remarque. *La réciproque est fausse en général : une suite peut n'admettre qu'une seule valeur d'adhérence et ne pas être convergente.*

2 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

2.1 Définition

Définition. Une partie X de E est dite **compacte** lorsque, de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une suite converge dans X.

Remarque.

- *Il est équivalent de dire que toute suite d'élément de X a au moins une valeur d'adhérence dans X.*
- *L'ensemble vide $\varnothing$ est compact.*
- *Cette définition est dite « de Bolzano-Weierstrass », par opposition à celle de Borel-Lebesgue qui est hors programme.*

2.2 Propriétés

Proposition. Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque. *Nous verrons plus tard que, si E est de dimension finie, la réciproque est vraie. Dans le cas d'un espace de dimension infinie, ce n'est pas le cas.*

Exemple. On munit l'espace $E = \mathbb{K}[X]$ de la norme :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Max}_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

où les a_k sont les coefficients du polynôme P. Trouver une suite d'éléments de $S(0,1)$ qui n'admette aucune valeur d'adhérence. Qu'a-t-on montré ?

Proposition. Un fermé relatif A d'une partie compacte X est un compact.

Remarque.

- *Comme X est compacte, c'est en particulier un fermé et donc dire que A est un fermé relatif de X revient à dire que c'est un fermé de E.*
- *On a en fait l'équivalence, lorsque $A \subset X$ et X compacte :*

$$A \text{ fermée} \iff A \text{ compacte}$$

Proposition. Une suite d'éléments de X compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

2.3 Produit d'une famille finie de compacts

Proposition. Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$, ..., $(E_p, \|\cdot\|_p)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On considère, pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, un compact X_i de E_i. Alors : $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ est un compact de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, muni de la norme produit.

Remarque. *Ainsi, un produit (fini) de compacts est compact.*

3 Applications continues sur une partie compacte

3.1 Image d'un compact par une application continue

Théorème.

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Remarque. *Il s'agit ici de l'image (directe) d'un compact par une application continue, qui est compacte. On sait aussi que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert (resp. un fermé).*

Théorèmes des bornes atteintes.

Soit E un espace vectoriel normé, et X une partie compacte de E. Soit :

$$f \;:\; X \subset E \to \mathbb{R}$$

Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque.

- *f atteint un minimum et un maximum sur X.*
- *C'est un théorème très utilisé pour montrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum. On peut aussi se ramener à l'utilisation de ce théorème à l'aide d'une restriction à un compact.*

Exemple. Soit $f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$$

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

3.2 Continuité uniforme

Théorème de Heine.

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Exemples : compacts de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.

Remarque. *Ce théorème, démontré en première année par dichotomie, peut s'exprimer maintenant en disant que toute suite bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire. Les compacts de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$).

Remarque.

- *Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles compacts. Mais il y a beaucoup de compacts qui ne sont pas des intervalles.*
- *Tout compact X de $\mathbb{R}$ est fermé et borné, donc inclus dans $[\mathrm{Inf}(X), \mathrm{Sup}(X)] = [\mathrm{Min}(X), \mathrm{Max}(X)]$. C'est pour cela que, sur $\mathbb{R}$, les expressions « sur tout compact » ou « sur tout segment » ont le même sens.*

4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire. Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie, d'une suite ou d'une fonction ne dépend pas du choix de la norme. De même, le caractère ouvert, fermé ou dense d'une partie de dépend pas du choix de la norme.

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_p)_p$ une suite de E. On note $(x_p^k)_p$ les suites coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$x_p = \sum_{k=1}^{n} x_p^k e_k$$

Alors :

$$(x_p)_p \text{ converge dans } E \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ (x_p^k)_p \text{ converge dans } \mathbb{K}$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de $(x_p)_p$ et ℓ_k celle de $(x_p^k)_p$, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f : X \to E$ une application à valeurs dans E. On note $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$$

Alors :

$$f \text{ a une limite en } x_0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ f_k \text{ a une limite en } x_0$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de f en x_0 et ℓ_k celle de f_k, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

4.3 Compacts d'un espace de dimension finie

Théorème.

> Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Remarque. *Ainsi, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, ou encore de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Corollaire. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Corollaire. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(E, \|\cdot\|)$, alors F est fermé.

5 Annexes

5.1 Annexe : démonstration du théorème de Heine

Théorème de Heine.

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Preuve. On considère $f : X \subset E \to F$ une application continue sur X compact de E. Raisonnons par l'absurde, en supposant que f ne soit pas uniformément continue :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in X \text{ t.q.}$$
$$\|x - y\|_E \leqslant \alpha \text{ et } \|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon$$

On applique cette propriété avec $\alpha = \dfrac{1}{n}$, ce qui fournit deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de X telles que :

$$\forall n,\ \|x_n - y_n\|_E \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \|f(x_n) - f(y_n)\|_F > \varepsilon$$

$(x_n, y_n)_n$ est une suite du compact X^2, donc on peut en extraire une suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$ qui convergent vers un élément $(a, b) \in X^2$.
D'une part, pour tout n :

$$0 \leqslant \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|_E \leqslant \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant \frac{1}{n}$$

et donc, à la limite :

$$0 \leqslant \|a - b\|_E \leqslant 0$$

et donc $a = b$.
D'autre part, pour tout n :

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\|_F > \varepsilon$$

et donc, à la limite, en exploitant la continuité de f et de la norme :

$$\|f(a) - f(b)\|_F \geqslant \varepsilon > 0$$

et donc $f(a) \neq f(b)$, ce qui contredit $a = b$.
On a montré que f est uniformément continue. □

5.2 Complément : équivalence des normes en dimension finie

Théorème.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve (non exigible). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, on pose :

$$\|x\|_\infty^E = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$$

qui est une norme. On considère une seconde norme, notée N, sur E, et on souhaite montrer que N et $\|\cdot\|_\infty^E$ sont équivalentes.

- Pour $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, on a :
$$\begin{aligned} N(x) &= N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \\ &\qquad \text{par inégalité triangulaire et homogénéité} \\ &\leqslant \|x\|_\infty^E \underbrace{\sum_{i=1}^{n} N(e_i)}_{\text{noté } \beta} \\ &= \beta \|x\|_\infty^E \end{aligned}$$
où $\beta > 0$ car les e_i ne sont pas nuls.
- On cherche maintenant $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$:
$$\alpha \|x\|_\infty^E \leqslant N(x)$$
ce qui revient à minorer
$$\frac{N(x)}{\|x\|_\infty^E} = N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty^E}\right)$$
sur $E \setminus \{0\}$, c'est-à-dire minorer :
$$N(y)$$
quand y parcourt $S^E(0,1)$, sphère unité de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty^E$.
- Plutôt que d'étudier directement $N(y)$, envisageons l'application :
$$\begin{array}{rcccc} \phi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \to & (E, \|\cdot\|_\infty^E) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ (y_1, \dots, y_n) & \mapsto & y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i & \mapsto & N(y) \end{array}$$
On a :
$$\begin{aligned} &|\phi(y_1, \dots, y_n) - \phi(x_1, \dots, x_n)| \\ &\quad = |N(y) - N(x)| \\ &\quad \leqslant N(y - x) \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ &\quad = N\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) e_i\right) \\ &\quad \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| N(e_i) \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ &\quad \leqslant \|(y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{n} N(e_i)}_{\text{noté } K} \\ &\quad = K \|(y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)\|_\infty \end{aligned}$$
donc ϕ est K-lipschitzienne, donc continue.
- La sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte. En effet, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est un fermé comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\|\cdot\|_\infty$, et il est inclus dans $BF(0,1) = [-1,1]^n$, qui est compact comme produit de compacts ; et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est analogue avec la boule fermée unité qui un produit de disques fermés.
- Ainsi, sur le compact $S(0,1)$, l'application continue ϕ admet un minimum noté α : il existe $(x_1, \dots, x_n) \in S(0,1)$ tel que :
$$\begin{aligned} \alpha &= \phi(x_1, \dots, x_n) \\ &= N(x) \\ &> 0 \text{ car } x \neq 0 \end{aligned}$$
- Comme $\|y\|_\infty^E = 1 \iff \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty = 1$, on a montré que :
$$\forall y \in S^E(0,1),\ N(y) \geqslant \alpha$$
et donc, pour tout $x \in E$:
$$N(x) \geqslant \alpha \|x\|_\infty^E$$

On peut remarquer que l'existence de β établie au premier point peut aussi être justifiée par l'existence d'un maximum de ϕ sur $S(0,1)$. □

5.3 Compacts d'un espace de dimension finie

Lemme. Les compacts de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées et bornées.

Preuve. On sait déjà que tout compact est fermé et borné.
Considérons A une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Comme A est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, il existe $M > 0$ tel que :

$$A \subset [-M, M]^n (\text{resp. } A \subset D(0, M)^n)$$

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Or $[-M, M]^n$ (resp. $D(0, M)^n$) est compact en tant que produit de compacts. Donc A est compact, comme fermé dans un compact. □

Théorème.

> Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Preuve. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty^E$:

$$\|x\|_\infty^E = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$$

lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, et on munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$$

Alors $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}^n & \to & E \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$ définit un isomorphisme qui préserve la norme. Alors $A \subset E$ est bornée (resp. fermée, resp. compacte) si et seulement si $f^{-1}(A) \subset \mathbb{K}^n$ est bornée (resp. fermée, resp. compacte).
L'équivalence établie dans le lemme se transfert donc à E. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Compacité du groupe orthogonal

460.1

On note $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^\top M = I_n\}$.
Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est compact.

Existence d'un minimum pour une fonction coercive

460.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Les valeurs d'adhérences d'une suite

460.3

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.

Exercices du CCINP

460.4

13

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \ ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercices

460.5

Soit E un espace normé de dimension finie. Montrer que la sphère unité :

$$S = \{x \in E, \ \|x\| = 1\}$$

est une partie compacte.

460.6

Soit E un espace normé de dimension finie $n \geqslant 2$. Montrer que l'ensemble des projecteurs de E est un fermé de $\mathcal{L}(E)$, et qu'il n'est pas compact.

460.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\{AP, \ P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} \text{ et } \{P^{-1}AP, \ P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$$

sont des compacts.

460.8

Soit E et F deux espaces normés, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$ si et seulement si A et B sont compactes.

Petits problèmes d'entrainement

460.9 ✍

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie, et ℓ sa limite. Montrer que $\{u_n, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

460.10 ✍

Soit E un espace euclidien, et $C \subset E$ un convexe fermé.

(a) Pour $a, b, x \in E$ tels que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$, montrer que :

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| < \|x - a\|$$

(b) Montrer que, pour tout x, il existe un unique $a \in C$ tel que :

$$\|x - a\| = d(x, C)$$

On définit ainsi une application : $P \ : \ x \mapsto a$ appelée **projection sur le convexe** C.

(c) Soit $x \in E$ et $a \in C$ tels que :

$$\forall y \in C, \ \langle x - a, y - a\rangle \leqslant 0$$

Montrer que $a = P(x)$.

(d) Inversement, on suppose qu'il existe $y \in C$ tel que :

$$\langle x - P(x), y - P(x)\rangle > 0$$

En considère les vecteurs de la forme $ty + (1-t)P(x)$ où $t \in [0,1]$, obtenir une contradiction.

On a donc montré que $P(x)$ est l'unique vecteur $a \in C$ tel que :

$$\forall y \in C,\ \langle x-a, y-a \rangle \leqslant 0$$

(e) Établir que, pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x-y, P(x)-P(y) \rangle \geqslant \|P(x)-P(y)\|^2$$

et en déduire que P est continue.

460.11

Soit E un espace normé de dimension quelconque. Soit F une partie fermée de E, et K une partie compacte. Que peut-on dire de l'ensemble :

$$F+K = \{x+y,\ x \in F,\ y \in K\}$$

460.12

Soit E un espace normé de dimension quelconque. Soit A et B deux parties compactes de E. Que peut-on dire de l'ensemble :

$$A+B = \{x+y,\ x \in A,\ y \in B\}$$

460.13

Soit E un espace normé de dimension finie et $r > 0$. On considère K une partie compacte de E. Montrer que

$$K_r = \bigcup_{x \in K} BF(x,r)$$

est compacte.

460.14

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace de E formé des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$.
Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction polynomiale ϕ_n telle que :

$$\|f-\phi_n\|_\infty = \operatorname{Inf}\big(\{\|f-\phi\|,\ \phi \in F_n\}\big)$$

460.15

Soit A une partie fermée et non vide d'un espace normé E de dimension finie. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que :

$$d(x,A) = \|x-a\|$$

460.16

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application continue. On suppose E de dimension finie, et :

$$f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0_F$$

Montrer que f est uniformément continue sur E.

460.17

(a) Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est un intervalle.

(b) Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\Big(\sin\big(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\big)\Big)_n$?

460.18

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni des deux normes définies par :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |P(t)| \text{ et } \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Vérifier que la suite $(X^n)_n$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et qu'elle converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(b) Est-ce que $(X^n)_n$ admet une valeur d'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

460.19

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé E. On considère $f : K \to K$ telle que :

$$\forall x, y \in K,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

(a) Montrer que f possède un unique point fixe c.

(b) Soit $(x_n)_n$ la suite définie par récurrence par :

$$x_0 \in K \text{ et } x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n$$

Montrer que $(x_n)_n$ converge vers c.

460.20

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé E. On considère $f : E \to E$ telle que :

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

et telle que :

$$f(K) \subset K$$

(a) Soit $a \in K$ fixé, et $(x_n)_n$ la suite définie par récurrence par :

$$x_0 = a \text{ et } x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n$$

Montrer que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

(b) En déduire que $f(K) = K$.

460.21

Soit E un espace normé de dimension finie, et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans E.

460.22

Soit K une partie compacte d'un espace normé E, et A une partie fermée d'un espace normé F. On définit :

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{C}^0(K, F),\ f(K) \cap A \neq \varnothing\}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie fermée de $\big(\mathcal{C}^0(K, F), \|\cdot\|_\infty\big)$.

460.23

Soit K une partie compacte d'un espace normé E, et $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties ouvertes. On suppose que :

$$K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k$$

460.24

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E.

(a) Montrer que :

$$\forall a \in E,\ \exists x \in F \text{ t.q. } d(a, F) = \|a - x\|$$

(b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que :

$$d(a, F) = 1 \text{ et } \|a\| = 1$$

On suppose maintenant E de dimension infinie.

(c) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|a_n\| = 1 \text{ et } d\big(a_{n+1}, \mathrm{Vect}(a_0, \ldots, a_n)\big) = 1$$

(d) Conclure que la boule unité de E n'est pas compacte.