Dérivation, intégration des fonctions vectorielles de variable réelle

Cours 2

Exercices 8

Tous les espaces vectoriels normés envisagés dans ce chapitre sont de dimension finie.
On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} I & \to & F \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. *Pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas de théorème de Rolle, pas de quotient etc.*

Remarque. *Dans le cadre de notre programme, on ne dérive que les fonctions de variable réelle, et pas les fonctions de variable complexe.*

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1.1 Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a lorsque la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$$

admet une limite en 0. On note alors $f'(a)$ cette limite.

Remarque. *$f'(a)$ est un élément de F, un vecteur.*

Proposition. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ tel que, au voisinage de $h \to 0$:

$$f(a+h) = f(a) + h\ell + \mathrm{o}(h)$$

Remarque. *On a aussi :*

$$\begin{aligned} f'(a) = \ell &\iff \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big) \xrightarrow[t\to a]{} \ell \\ &\iff f(t) = f(a) + (t-a)\ell + \underset{t\to a}{\mathrm{o}}\big(t-a\big) \end{aligned}$$

Définition. f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** :

$$f'\ :\ \begin{array}{rcl} I & \to & F \\ t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ lorsque f est dérivable, et que f' est continue.

Remarque. *On peut définir, lorsqu'elles existent, les dérivées à gauche et à droite en a.*

1.2 Interprétation cinématique

En cinématique, on étudie le mouvement d'un point mobile :

$$t \mapsto M(t)$$

où la variable t désigne le temps. Fixant une origine à l'espace affine, cela revient à étudier la fonction à valeurs vectorielles :

$$f\ :\ t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$$

On écrit alors, en général, $M'(t)$ pour $f'(t)$ ou encore $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$, quantité qui ne dépend pas du choix de l'origine de l'espace affine, et qui représente le **vecteur vitesse** à l'instant t.

1.3 Opérations sur les dérivées

1.3.1 Combinaison linéaire

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont dérivables en $a \in E$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.3.2 Image par une application linéaire

Proposition. Soit G un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(F, G)$, et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable en $a \in I$.
Alors $u \circ f : t \mapsto u(f(t))$ est dérivable en a et :

$$(u \circ f)'(a) = u\big(f'(a)\big)$$

Remarque. *Ici, f n'est pas une fonction de la variable réelle, donc on n'applique pas la formule usuelle. Ça n'a pas de sens de parler de la « dérivée de u ».*

Proposition. Avec les notations précédentes, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $u \circ f$ l'est aussi.

Exemple. Soit $A : \begin{array}{rcl} \mathbb{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & A(t) \end{array}$ une application dérivable sur I. Montrer que $t \mapsto \operatorname{tr}\big(A(t)\big)$ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée à l'aide de A'.

Exemple. Soit $x : \begin{array}{rcl} I \subset \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$ une application dérivable sur I. Pour $a \in E$, montrer que l'application $t \mapsto \langle a, x(t) \rangle$ est dérivable sur I est exprimer sa dérivée à l'aide de x'.

1.3.3 Bilinéarité, dérivée d'un produit

Proposition. Soit E, F, G trois espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en a, alors :

$$B(f, g) : \begin{array}{rcl} I & \to & G \\ t & \mapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(B(f, g)\big)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big)$$

Proposition. Avec les mêmes notations, si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $B(f, g)$ l'est aussi.

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ respectivement. Montrer que $t \mapsto A(t)B(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ une application $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $t \mapsto \big(A(t)\big)^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

Exemple. Soit F un espace euclidien, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans F. Montrer que $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ et $t \mapsto \|f(t)\|^2$ sont $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de leurs dérivées.

1.3.4 Multilinéarité

Proposition. Soit $F_1, F_2, \dots, F_p, G$ des espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $M : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p \to G$ est mutlilinéaire et que les $f_i : I \to F_i$ sont dérivables en a, alors :

$$M(f_1, f_2, \dots, f_p) : \begin{array}{rcl} I & \to & G \\ t & \mapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(M(f_1, f_2, \dots, f_p)\big)'(a) = M\big(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_p(a)\big) + M\big(f_1(a), f_2'(a), \dots, f_p(a)\big) + \dots + M\big(f_1(a), f_2(a), \dots, f_p'(a)\big)$$

1.3.5 Dérivation d'une fonction composée

Proposition. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to F$. On suppose :

- $\varphi(I) \subset J$
- φ dérivable en a
- g dérivable en $\varphi(a)$

Alors $g \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(g \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\, g'\big(\varphi(a)\big)$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si g est $\mathcal{C}^1$ sur J et φ est $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $g \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.3.6 Caractérisation par les fontions coordonnées

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Proposition. Avec les notations précédentes, f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si chaque f_i l'est.

Exemple. Justifier que $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

1.3.7 Caractérisation des fonctions constantes

Théorème.

> Soit $f : I \to F$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur $\mathring{I}$.

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition. On a déjà défini le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^1$: elle est dérivable et sa dérivée est continue. On définit la classe $\mathcal{C}^k$ par récurrence : f est $\mathcal{C}^{k+1}$ si $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $f^{(k)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

$\mathcal{C}^k(I, F)$ est un espace vectoriel.

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F et G respectivement, $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big)$$

Proposition. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et :

$$\forall t \in J,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)\, f'\big(\varphi(t)\big)$$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$\forall t \in I,\ f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(t) e_i$$

1.5 Limite de la dérivée, classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement

Théorème.

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si

- f est continue sur I (en particulier en a)
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $f'(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$

alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (et donc f' est continue en a).

Théorème.

Soit $f : I \setminus \{a\} \to F$. Si

- f est $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$
- f, f', ..., $f^{(k)}$ admettent en a une limite ℓ, ℓ_1, ..., ℓ_k respectivement.

alors f se prolonge en a de faicon $\mathcal{C}^k$ en posant $f(a) = \ell$, alors $f^{(i)}(a) = \ell_i$ pour tout i.

2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition. Soit $f : I = [a, b] \to F$. On dit que f est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivdision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, f est constante, et on note v_i cette constante.
Avec les notations précédente, pour f en escalier, on définit l'**intégrale de f sur** $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{i-1} (a_{i+1} - a_i) v_i$$

qui ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Rappel. Toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans un espace normé de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Dans une base donnée, on approche chaque fonction coordonnée. □

Définition. Soit $f : [a,b] \to F$ une fonction continue par morceaux, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $\big(\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est indépendante du choix de la suite $(g_n)_n$. On appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ cette limite commune.

Proposition. Relation de Chasles.

Proposition. Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, alors $\lambda f+\mu g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F, et $u\in\mathcal{L}(F,G)$. Alors $u\circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b u\circ f(t)\,\mathrm{d}t = u\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de F et f_i les applications coordonnées de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \Big(\int_I f_i(t)\,\mathrm{d}t\Big)e_i$$

C'est-à-dire que les coordonnées de l'intégrale sont les intégrales des fonctions coordonnées.

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t)\,\mathrm{d}t$ où $A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$

Proposition. Soit $f : [a,b]\to F$ continue par morceaux et $\|\cdot\|$ une norme sur F. Lorsque $a\leqslant b$:

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.3 Sommes de Riemann

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[0,1]$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.4 Primitives

Définition. On appelle **primitive** de $f : I \to F$ toute fonction $F : I \to F$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème.

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si f est continue sur I, alors f possède une unique primitive qui s'annule en a, et c'est :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.5 Accroissements finis, formules de Taylor

Inégalité des accroissaments finis.

Soit $f : I \to F$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I et $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \in \,]a, b[,\ \|f'(t)\| \leqslant M$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|$$

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors pour tout $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t)\,\mathrm{d}t$$

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, telle que $f^{(n+1)}$ bornée sur I. Alors pour tout $a, x \in I$:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$:

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

Formule de Taylor-Young.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, alors pour tout $a \in I$, au voisinage de $h \to 0$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0_E$.
On note $\mathrm{o}(h^n)$ pour désigner la fonction vectorielle $h \mapsto h^n \varepsilon(h)$.

Exercices

470.1

Soit E plan euclidien de dimension 2, et $f\ :\ t \mapsto f(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante. Montrer que, pour tout t :

$$f(t) \perp f'(t)$$

470.2

On considère :

$$\begin{array}{rccl} f\ :\ ]-1,1[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t\right) \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rccl} u\ :\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

Calculer $u\left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

470.3

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f\ :\ [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. On suppose que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \in F$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in F$.

Petits problèmes d'entrainement

470.4 ✍

Soit E un espace euclidien, et $f\ :\ [a,b] \to E$ une application continue. On suppose que :

$$\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|$$

On note u le vecteur unitaire de E défini par :

$$u = \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [a,b]$, on décompose $f(t)$ selon $\mathrm{Vect}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(u)^\perp$ sous la forme :

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

(a) Montrer que α et v sont continues sur $[a,b]$.

(b) Démontrer que $\displaystyle\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$ est orthgonal à u.

(c) Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

(d) Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha(t) \leqslant \|f(t)\|$.

(e) En déduire que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\|u$.

(f) Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas E euclidien ?

470.5

Soit $M\ :\ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M(x)^\top M(x) = I_n$$

Montrer que $M'(x)$ n'est inversible pour aucune valeur $x \in \mathbb{R}$.

470.6

Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$D(x) = \det\left(P_j^{(i-1)}\right)_{i,j}$$

Montrer que D est constante sur $\mathbb{R}$.

470.7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on définit :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

(a) Montrer que D_n est dérivable, et exprimer pour $n \geqslant 2$ $D_n'(x)$ en fonction de $D_{n-1}(x)$.

(b) En déduire l'expression de $D_n(x)$.

470.8

Pour $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & a_n + x \end{vmatrix}$$

470.9

Soit $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = 0$ et dérivable en 0 à droite. Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

470.10

Soit $f : [a,b] \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|$$