

## Dérivation, intégration des fonctions vectorielles de variable réelle

|   |          |
|---|----------|
| <b>Cours</b>  | <b>2</b> |
| 1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .                 | 2        |
| 1.1 Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .  | 2        |
| 1.2 Interprétation cinématique . . . . .                                    | 2        |
| 1.3 Opérations sur les dérivées . . . . .                                   | 3        |
| 1.4 Fonctions de classe $C^k$ . . . . .                                     | 4        |
| 1.5 Limite de la dérivée, classe $C^k$ par prolongement . . . . .           | 5        |
| 2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .                | 5        |
| 2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment . . . . .           | 5        |
| 2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . . | 6        |
| 2.3 Sommes de Riemann . . . . .   | 6        |
| 2.4 Primitives . . . . .  | 7        |
| 2.5 Accroissements finis, formules de Taylor . . . . .                      | 7        |
| <b>Exercices</b>  | <b>8</b> |
| Exercices . . . . .   | 8        |
| Petits problèmes d'entraînement . . . . .                                   | 8        |

Tous les espaces vectoriels normés envisagés dans ce chapitre sont de dimension finie. On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions :

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow F \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $F$  un espace normé de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Remarque.** Pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas de théorème de Rolle, pas de quotient etc.

**Remarque.** Dans le cadre de notre programme, on ne dérive que les fonctions de variable réelle, et pas les fonctions de variable complexe.

## 1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

### 1.1 Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles

**Définition.** Soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$**  lorsque la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$$

admet une limite en 0. On note alors  $f'(a)$  cette limite.

**Remarque.**  $f'(a)$  est un élément de  $F$ , un vecteur.

**Proposition.**  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement s'il existe  $\ell \in F$  tel que, au voisinage de  $h \rightarrow 0$  :

$$f(a+h) = f(a) + h\ell + o(h)$$

**Remarque.** On a aussi :

$$\begin{aligned} f'(a) = \ell &\iff \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a)) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \ell \\ &\iff f(t) = f(a) + (t-a)\ell + \underset{t \rightarrow a}{o}(t-a) \end{aligned}$$

**Définition.**  $f$  est **dérivable sur  $I$**  si elle est dérivable en tout point de  $I$ . Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** :

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow F \\ t &\mapsto f'(t) \end{aligned}$$

On dit que  $f$  est  $C^1$  lorsque  $f$  est dérivable, et que  $f'$  est continue.

**Remarque.** On peut définir, lorsqu'elles existent, les dérivées à gauche et à droite en  $a$ .

### 1.2 Interprétation cinématique

En cinématique, on étudie le mouvement d'un point mobile :

$$t \mapsto M(t)$$

où la variable  $t$  désigne le temps. Fixant une origine à l'espace affine, cela revient à étudier la fonction à valeurs vectorielles :

$$f : t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$$

On écrit alors, en général,  $M'(t)$  pour  $f'(t)$  ou encore  $\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$ , quantité qui ne dépend pas du choix de l'origine de l'espace affine, et qui représente le **vecteur vitesse** à l'instant  $t$ .

### 1.3 Opérations sur les dérivées

---

#### 1.3.1 Combinaison linéaire

---

**Proposition.** Soit  $f, g$  deux fonctions  $I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a \in E$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

**Proposition.** Soit  $f, g$  deux fonctions  $I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

#### 1.3.2 Image par une application linéaire

---

**Proposition.** Soit  $G$  un espace normé de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(F, G)$ , et  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  une fonction dérivable en  $a \in I$ .

Alors  $u \circ f : t \mapsto u(f(t))$  est dérivable en  $a$  et :

$$(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$$

**Remarque.** Ici,  $f$  n'est pas une fonction de la variable réelle, donc on n'applique pas la formule usuelle. Ça n'a pas de sens de parler de la « dérivée de  $u$  ».

**Proposition.** Avec les notations précédentes, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $u \circ f$  l'est aussi.

**Exemple.** Soit  $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une application dérivable sur  $I$ . Montrer que  $t \mapsto \text{tr}(A(t))$  est dérivable sur  $I$ , et exprimer sa dérivée à l'aide de  $A'$ .

**Exemple.** Soit  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  une application dérivable sur  $I$ . Pour  $a \in E$ , montrer que l'application  $t \mapsto \langle a, x(t) \rangle$  est dérivable sur  $I$  et exprimer sa dérivée à l'aide de  $x'$ .

#### 1.3.3 Bilinéarité, dérivée d'un produit

---

**Proposition.** Soit  $E, F, G$  trois espaces normés de dimensions finies,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $B : E \times F \rightarrow G$  est bilinéaire,  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  sont dérivables en  $a$ , alors :

$$\begin{aligned} B(f, g) : I &\rightarrow G \\ t &\mapsto B(f(t), g(t)) \end{aligned}$$

est dérivable en  $a$  et :

$$(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

**Proposition.** Avec les mêmes notations, si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $B(f, g)$  l'est aussi.

**Exemple.** Soit  $t \mapsto A(t)$  et  $t \mapsto B(t)$  deux applications  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  intervalle, à valeurs dans  $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$  respectivement. Montrer que  $t \mapsto A(t)B(t)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et donner l'expression de sa dérivée.

**Exemple.** Soit  $t \mapsto A(t)$  une application  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  intervalle, à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $t \mapsto (A(t))^2$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et donner l'expression de sa dérivée.

**Exemple.** Soit  $F$  un espace euclidien,  $t \mapsto f(t)$  et  $t \mapsto g(t)$  deux applications  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  intervalle, à valeurs dans  $F$ . Montrer que  $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$  et  $t \mapsto \|f(t)\|^2$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et donner l'expression de leurs dérivées.

#### 1.3.4 Multilinéarité

---

**Proposition.** Soit  $F_1, F_2, \dots, F_p, G$  des espaces normés de dimensions finies,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $M : F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \rightarrow G$  est multilinéaire et que les  $f_i : I \rightarrow F_i$  sont dérivables en  $a$ , alors :

$$\begin{aligned} M(f_1, f_2, \dots, f_p) : I &\rightarrow G \\ t &\mapsto M(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) \end{aligned}$$

est dérivable en  $a$  et :

$$(M(f_1, f_2, \dots, f_p))'(a) = M(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_p(a)) + M(f_1(a), f_2'(a), \dots, f_p(a)) + \dots + M(f_1(a), f_2(a), \dots, f_p'(a))$$

### 1.3.5 Dérivation d'une fonction composée

**Proposition.** Soit  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow F$ . On suppose :

- $\varphi(I) \subset J$
- $\varphi$  dérivable en  $a$
- $g$  dérivable en  $\varphi(a)$

Alors  $g \circ \varphi$  est dérivable en  $a$  et :

$$(g \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) g'(\varphi(a))$$

**Proposition.** Avec les notations précédentes, si  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $g \circ \varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

### 1.3.6 Caractérisation par les fonctions coordonnées

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ , et  $f_i$  les applications coordonnées de  $f : I \rightarrow F$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si chaque  $f_i$  l'est. Dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f_i'(a) e_i$$

**Proposition.** Avec les notations précédentes,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si chaque  $f_i$  l'est.

**Exemple.** Justifier que  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa dérivée.

### 1.3.7 Caractérisation des fonctions constantes

**Théorème.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction continue sur  $I$ , dérivable sur l'intérieur  $\overset{\circ}{I}$  de  $I$ . Alors  $f$  est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur  $\overset{\circ}{I}$ .

## 1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

**Définition.** On a déjà défini le fait que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  : elle est dérivable et sa dérivée est continue. On définit la classe  $\mathcal{C}^k$  par récurrence :  $f$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  si  $f^{(k)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On note  $f^{(k)}$  ou  $\frac{d^k f}{dx^k}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  lorsqu'elle est  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k$ .

**Proposition.** Si  $f, g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $F$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

$\mathcal{C}^k(I, F)$  est un espace vectoriel.

**Proposition.** Si  $f, g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $F$  et  $G$  respectivement,  $B : E \times F \rightarrow G$  est bilinéaire, alors  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et :

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

**Proposition.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $F$ ,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi(J) \subset I$ , alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et :

$$\forall t \in J, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$$

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ , et  $f_i$  les applications coordonnées de  $f : I \rightarrow F$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si et seulement si chaque  $f_i$  l'est. Dans ce cas :

$$\forall t \in I, f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^n f_i^{(k)}(t) e_i$$

## 1.5 Limite de la dérivée, classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement

### Théorème.

Soit  $f : I \rightarrow F$  et  $a \in I$ . Si

- $f$  est continue sur  $I$  (en particulier en  $a$ )
- $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$
- $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \ell$

alors  $f$  est dérivable en  $a$ , et  $f'(a) = \ell$  (et donc  $f'$  est continue en  $a$ ).

### Théorème.

Soit  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow F$ . Si

- $f$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $I \setminus \{a\}$
- $f, f', \dots, f^{(k)}$  admettent en  $a$  une limite  $\ell, \ell_1, \dots, \ell_k$  respectivement.

alors  $f$  se prolonge en  $a$  de façon  $\mathcal{C}^k$  en posant  $f(a) = \ell$ , alors  $f^{(i)}(a) = \ell_i$  pour tout  $i$ .

## 2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

### 2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

**Définition.** Soit  $f : I = [a, b] \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est en **escalier** lorsqu'il existe une subdivision  $(a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $f$  est constante, et on note  $v_i$  cette constante. Avec les notations précédente, pour  $f$  en escalier, on définit l'**intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  par :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) v_i$$

qui ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à  $f$ .

## 2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

**Rappel.** Toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans un espace normé de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

*Preuve.* Dans une base donnée, on approche chaque fonction coordonnée. □

**Définition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  une fonction continue par morceaux, et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors  $(\int_a^b g_n(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et sa limite est indépendante du choix de la suite  $(g_n)_n$ . On appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  cette limite commune.

**Proposition.** Relation de Chasles.

**Proposition.** Si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux sur  $[a, b]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

**Proposition.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $F$ , et  $u \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $u \circ f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et :

$$\int_a^b u \circ f(t) dt = u \left( \int_a^b f(t) dt \right)$$

**Proposition.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $F$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$  et  $f_i$  les applications coordonnées de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

C'est-à-dire que les coordonnées de l'intégrale sont les intégrales des fonctions coordonnées.

**Exemple.** Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t) dt$  où  $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

**Proposition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  continue par morceaux et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $F$ . Lorsque  $a \leq b$  :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

**Proposition.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $F$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions continues par morceaux, qui converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

## 2.3 Sommes de Riemann

**Proposition.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[0, 1]$ . Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

**Proposition.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

## 2.4 Primitives

**Définition.** On appelle **primitive** de  $f : I \rightarrow F$  toute fonction  $F : I \rightarrow F$  dérivable telle que  $F' = f$ .

**Théorème.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  et  $a \in I$ . Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  possède une unique primitive qui s'annule en  $a$ , et c'est :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

## 2.5 Accroissements finis, formules de Taylor

**Inégalité des accroissements finis.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall t \in ]a, b[, \|f(t)\| \leq M$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$$

**Formule de Taylor avec reste intégral.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , alors pour tout  $a, x \in I$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

ou encore, pour tout  $a \in I$  et  $h$  tel que  $a+h \in I$  :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t) dt$$

**Inégalité de Taylor-Lagrange.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , telle que  $f^{(n+1)}$  bornée sur  $I$ . Alors pour tout  $a, x \in I$  :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^I$$

ou encore, pour tout  $a \in I$  et  $h$  tel que  $a+h \in I$  :

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^I$$

**Formule de Taylor-Young.**

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors pour tout  $a \in I$ , au voisinage de  $h \rightarrow 0$  :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h)$$

où  $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_E$ .

On note  $o(h^n)$  pour désigner la fonction vectorielle  $h \mapsto h^n \varepsilon(h)$ .

## Exercices

**47.1**

Soit  $E$  plan euclidien de dimension 2, et  $f : t \mapsto f(t)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $t \mapsto \|f(t)\|$  est constante. Montrer que, pour tout  $t$  :

$$f(t) \perp f'(t)$$

**47.2**

On considère :

$$\begin{aligned} f : ]-1, 1[ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left( \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

Calculer  $u \left( \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \right)$ .

**47.3**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux. On suppose que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \in F$ . Montrer que  $\int_a^b f(t) dt \in F$ .

## Petits problèmes d'entraînement

**47.4**

Soit  $E$  un espace euclidien, et  $f : [a, b] \rightarrow E$  une application continue. On suppose que :

$$\int_a^b \|f(t)\| dt = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$$

On note  $u$  le vecteur unitaire de  $E$  défini par :

$$u = \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t) dt$$

Pour tout  $t \in [a, b]$ , on décompose  $f(t)$  selon  $\text{Vect}(u) \oplus \text{Vect}(u)^\perp$  sous la forme :

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

(a) Montrer que  $\alpha$  et  $v$  sont continues sur  $[a, b]$ .

(b) Démontrer que  $\int_a^b v(t) dt$  est orthogonal à  $u$ .

(c) Démontrer que  $\int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b \|f(t)\| dt$ .

(d) Démontrer que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$ .

(e) En déduire que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) = \|f(t)\|u$ .

(f) Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas  $E$  euclidien ?

**47.5**

Soit  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x)^\top M(x) = I_n$$

Montrer que  $M'(x)$  n'est inversible pour aucune valeur  $x \in \mathbb{R}$ .

**47.6**

Soit  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On définit, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$D(x) = \det (P_j^{(i-1)})_{i,j}$$

Montrer que  $D$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .



**47.7**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  réel, on définit :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

- (a) Montrer que  $D_n$  est dérivable, et exprimer pour  $n \geq 2$   $D'_n(x)$  en fonction de  $D_{n-1}(x)$ .
- (b) En déduire l'expression de  $D_n(x)$ .

**47.8**

Pour  $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}$ , calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & a_n + x \end{vmatrix}$$

**47.9**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $f(0) = 0$  et dérivable en 0 à droite. Déterminer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

**47.10**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(a) = 0$ . Montrer que :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$$

**47.11**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à valeurs dans un espace normé de dimension finie. On suppose  $f$  et  $f''$  bornées, et on note  $M_0 = \|f\|_\infty$ ,  $M_2 = \|f''\|_\infty$ .

- (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$  :

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

- (b) En déduire que  $f'$  est bornée, et que :

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

- (c) Préciser l'étude précédente pour montrer que :

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

**47.12**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f : t \mapsto \det(A + tB)$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \text{tr}(\text{Com}(A + tB)^\top B)$$