

Connexité par arc

Cours	2
1 Parties connexes par arcs	2
1.1 Chemin continu	2
1.2 Composantes connexes par arcs, connexité par arcs	2
1.3 Image d'un connexe par arcs par une application continue	2
2 Le cas de $\mathbb{R}$	3
3 Caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes	3
4 Annexes	4
4.1 Complément : Ouverts et fermés dans un connexe par arcs	4
4.2 Complément : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes	4
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Intérieur, adhérence et connexité par arcs	5
Connexité de la somme de deux connexes par arcs	5
Connexité de la réunion convexe d'intersection non vide	5
Exercices	6
Petits problèmes d'entraînement	6

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 Parties connexes par arcs

1.1 Chemin continu

Définition. Soit A une partie de E . Pour $a, b \in A$, on appelle **chemin continu** (ou : arc) **joignant** a à b dans A toute application :

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow E$$

telle que :

- φ est continue
- $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in A$
- $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$

Remarque.

- L'image (directe) $\varphi([0, 1])$ s'appelle parfois le **support** du chemin.
- Par abus, $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ continue, à valeurs dans A et telle que $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$ s'appelle aussi **chemin** : on se ramène à la définition en composant φ par $t \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$ ou γ par $t \mapsto \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$.

Définition. On définit une relation binaire sur A en disant que $a\mathcal{R}b$ lorsqu'il existe un chemin continu joignant a à b dans A .

Proposition. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A .

1.2 Composantes connexes par arcs, connexité par arcs

Définition. Soit A une partie de E .

- On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$.
- On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs, qui est A .

Proposition. Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A .

Exemple. Une partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition. Une partie A de E est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que :

$$\forall x \in A, [a, x] \subset A$$

où $[a, x]$ désigne le segment d'extrémités a et x :

$$[a, x] = \{(1-t)a + tx, t \in [0, 1]\}$$

Proposition. Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

1.3 Image d'un connexe par arcs par une application continue

Théorème.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ et A une partie de E .
Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Exemple. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

2 Le cas de $\mathbb{R}$

Proposition. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les trois expressions « connexe par arcs », « convexe » et « intervalle » désignent la même notion. C'est spécifique à $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue, et que A est connexe par arcs, alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout $a, b \in A$, f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque.

- La conclusion peut aussi s'écrire : $f(A)$ est un intervalle.
- Dans le cas où $f(a) \leq f(b)$, pour tout γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$, il existe $c \in A$ tel que :

$$\gamma = f(c)$$

3 Caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U connexe par arcs. Alors :

$$f \text{ est constante sur } U \iff df \text{ est nulle sur } U$$

4 Annexes

4.1 Complément : Ouverts et fermés dans un connexe par arcs

Ce qui suit est hors programme.

Proposition. Soit A une partie connexe par arcs de E et $X \subset A$. Si X est à la fois un ouvert relatif et un fermé relatif de A , alors $X = \emptyset$ ou $X = A$.

Preuve. Supposons $X \neq \emptyset$. Fixons $a \in A$ et prenons $x \in X \subset A$. On va montrer que $a \in X$.

- Comme A est connexe par arc, il existe un chemin continu $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tel que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = x$. On note alors :

$$D = \{t \in [0, 1], \varphi(t) \in X\} = \varphi^{-1}(X)$$

- Par hypothèse, X est un fermé relatif de A , donc il existe F fermé tel que $X = F \cap A$. Alors :

$$D = \varphi^{-1}(X)$$

$$= \varphi^{-1}(F \cap A)$$

$$= \varphi^{-1}(F) \text{ car } \varphi \text{ à valeurs dans } A$$

est un fermé relatif de $[0, 1]$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

- D est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (contient 1) et minorée (par 0) donc admet une borne inférieure notée m . Mais D est un fermé relatif de $[0, 1]$ qui est fermé, donc D est fermé, et donc $m \in D$.

On raisonne par l'absurde en supposant que $m \neq 0$.

- Par hypothèse, X est un ouvert relatif de A , donc il existe Ω ouvert tel que $X = \Omega \cap A$. Alors :

$$D = \varphi^{-1}(X)$$

$$= \varphi^{-1}(\Omega \cap A)$$

$$= \varphi^{-1}(\Omega) \text{ car } \varphi \text{ à valeurs dans } A$$

est un ouvert relatif de $[0, 1]$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

- Comme D est un ouvert relatif de $[0, 1]$, et que $m \in D$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$]m - \eta, m + \eta[\cap [0, 1] \subset D$$

ce qui contredit la définition de la borne inférieure. C'est donc que $m = 0$, et donc $0 \in D$, i.e. $a = \varphi(0) \in X$.

On a montré que $X = \emptyset$ ou $X = A$. $\square$

Corollaire. Une application continue, localement constante, sur une partie connexe par arcs, est constante.

Preuve. Soit $f : A \rightarrow F$ continue, localement constante, sur A connexe par arcs. Fixons $a \in A$. On note :

$$X = f^{-1}(\{f(a)\}) = \{x \in A, f(x) = f(a)\}$$

- $\{f(a)\}$ est fermé, et f est continue, donc X est un fermé relatif de A .

- f est localement constante, donc si $x \in X$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in B(x, \eta) \cap A, f(y) = f(x)$$

et donc, comme $f(x) = f(a)$, $B(x, \eta) \cap A \subset X$. On a montré que X est un ouvert relatif de A .

Par la propriété précédente, comme X est non vide car contient a , c'est que $X = A$, et donc f est constante sur A . $\square$

4.2 Complément : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U connexe par arcs. Alors :

$$f \text{ est constante sur } U \iff df \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. On a déjà établi le résultat dans le cas où U est convexe.

Preuve.

- Si f est constante, sa différentielle est nulle.

- Supposons que df soit nulle sur U . Soit $a \in U$ et $X = \{b \in U, f(a) = f(b)\} = f^{-1}(\{f(a)\})$.

Alors d'une part X est un fermé relatif de U comme image réciproque du fermé $\{f(a)\}$ par f continue.

D'autre part, pour tout $x \in X$, $x \in U$ et U ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. La boule $B(x, r)$ étant convexe, et la différentielle de f étant nulle sur cette boule, f y est constante, égale à $f(x)$ et donc à $f(a)$. On a montré que $B(x, r) \subset X$, et donc que X est un ouvert.

X étant à la fois ouvert et fermé relatif de U , et non vide, le résultat précédent s'applique et on en déduit que $X = U$. Par suite, f est constante sur U . $\square$

Exercices et résultats classiques à connaître**Intérieur, adhérence et connexité par arcs****480.1**

Illustrer qu'il existe une partie A telle que :

- (a) $\overset{\circ}{A}$ connexe par arc et A non connexe par arcs.
- (b) A connexe par arcs et $\overset{\circ}{A}$ non connexe par arcs.
- (c) $\overline{A}$ connexe par arcs et A non connexe par arcs.

Connexité de la somme de deux connexes par arcs**480.2**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, A et B deux parties connexes par arcs de E .

- (a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
- (b) En déduire que $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Connexité de la réunion de convexes d'intersection non vide**480.3**

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de E espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que, si $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe par arcs.

Exercices

480.4

Est-ce que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

480.5

Est-ce que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

480.6

- (a) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
- (b) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

480.7

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie non vide, connexe par arcs, de E . Montrer que si $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, alors f est constante.

480.8

Soit $p : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout t , $p(t)$ est la matrice d'un projecteur. Montrer que le rang de $p(t)$ ne dépend pas de t .

Petits problèmes d'entraînement

480.9

Soit $n \geq 2$, $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer qu'il existe au moins deux nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que :

$$f(\omega z) = f(z)$$

480.10

Montrer que :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$$

est la réunion de deux composantes connexes par arcs.

480.11

Soit E un espace normé de dimension finie, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties connexes par arcs de E . On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe par arcs.

480.12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et injective sur I intervalle de longueur non nulle. Montrer que f est strictement monotone.

480.13

On définit :

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \left(t^2 \cos \frac{1}{t}, t^2 \sin \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable sur $[-1, 1]$, et que $f'([-1, 1])$ n'est pas connexe par arcs.

On pourra pour cela minorer la norme euclidienne de $f'(t)$.

480.14

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie connexe par arcs de E .

- (a) Montrer que A ne peut pas être l'union disjointe de deux ouverts relatifs non vides de A .
- (b) Montrer que A ne peut pas être l'union disjointe de deux fermés relatifs non vides de A .

480.15

Soit E un espace normé de dimension finie $n \geq 2$. Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

480.16

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.

- (a) Montrer que $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$ est convexe.

- (b) Établir que f est strictement monotone.

480.17

Soit A une partie ouverte et fermée d'un evn E .

- Donner deux exemples de parties A convenant.
- Montrer que la fonction $\mathbb{1}_A$ est continue sur E .
- En déduire que $A = \emptyset$ ou que $A = E$.

480.18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M) > 0$.

- En utilisant le pivot de Gauss, montrer que toute matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvection et de dilatation.
- En déduire que $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
- Déterminer les composantes connexes par arcs de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

480.19

Montrer qu'il n'existe aucune application continue injective de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$.

480.20

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie quelconque de E . On suppose que $(U_i)_{i \in I}$ est une partition de A constitués d'ouverts relatifs de A (non vides) et connexes par arcs. Alors les U_i sont exactement les composantes connexes par arcs de A .

480.21

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie de E . On appelle **extérieur** d'une partie l'intérieur de son complémentaire.

Montrer que, si C est une partie connexe par arcs qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A , alors C rencontre la frontière de A .

480.22

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^n$.

480.23

On définit :

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right), x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

Montrer que A est connexe par arcs, mais que $\overline{A}$ ne l'est pas.