Connexité par arc

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 Parties connexes par arcs

1.1 Chemin continu

Définition. Soit A une partie de E. Pour $a, b \in A$, on appelle **chemin continu** (ou : arc) **joignant** a **à** b **dans** A toute application :

$$\varphi \,:\, [0,1] \to E$$

telle que :

- φ est continue
- $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \in A$
- $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$

Remarque.

- *L'image (directe) $\varphi([0,1])$ s'appelle parfois le* ***support*** *du chemin.*
- *Par abus, $\gamma \,:\, [\alpha, \beta] \to E$ continue, à valeurs dans A et telle que $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$ s'appelle aussi* ***chemin*** *: on se ramène à la définition en composant φ par $t \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$ ou γ par $t \mapsto \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$.*

Définition. On définit une relation binaire sur A en disant que $a\mathcal{R}b$ lorsqu'il existe un chemin continu joignant a à b dans A.

Proposition. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

1.2 Composantes connexes par arcs, connexite par arcs

Définition. Soit A une partie de E.

- On appelle **composantes connexes par arcs de** A les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$.
- On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs, qui est A.

Proposition. Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A.

Exemple. Une partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition. Une partie A de E est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que :

$$\forall x \in A,\ [a, x] \subset A$$

où $[a, x]$ désigne le segment d'extrémités a et x :

$$[a, x] = \{(1-t)a + tx,\ t \in [0,1]\}$$

Proposition. Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

1.3 Image d'un connexe par arcs par une application continue

Théorème.

> Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f \,:\, E \to F$ et A une partie de E.
> Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Exemple. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

2 Le cas de $\mathbb{R}$

Proposition. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque. *Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les trois expressions « connexe par arcs », « convexe » et « intervalle » désignent la même notion. C'est spécifique à $\mathbb{R}$.*

Théorème des valeurs intermédiaires.

> Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$. Si f est continue, et que A est connexes par arcs, alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout $a, b \in A$, f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque.

- *La conclusion peut aussi s'écrire : $f(A)$ est un intervalle.*
- *Dans le cas où $f(a) \leqslant f(b)$, pour tout γ tel que $f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b)$, il existe $c \in A$ tel que :*

$$\gamma = f(c)$$

3 Caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

> Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U connexe par arcs. Alors :
>
> $$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

4 Annexes

4.1 Complément : Ouverts et fermés dans un connexe par arcs

Ce qui suit est hors programme.

Proposition. Soit A une partie connexe par arcs de E et $X \subset A$. Si X est à la fois un ouvert relatif et un fermé relatif de A, alors $X = \varnothing$ ou $X = A$.

Preuve. Supposons $X \neq \varnothing$. Fixons $a \in A$ et prenons $x \in X \subset A$. On va montrer que $a \in X$.

- Comme A est connexe par arc, il existe un chemin continu $\varphi : [0,1] \to A$ tel que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = x$.
  On note alors :
  $$D = \{t \in [0,1],\ \varphi(t) \in X\} = \varphi^{-1}(X)$$
- Par hypothèse, X est un fermé relatif de A, donc il existe F fermé tel que $X = F \cap A$. Alors :
  $$\begin{aligned} D &= \varphi^{-1}(X) \\ &= \varphi^{-1}(F \cap A) \\ &= \varphi^{-1}(F) \text{ car } \varphi \text{ à valeurs dans } A \end{aligned}$$
  est un fermé relatif de $[0,1]$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
- D est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (contient 1) et minorée (par 0) donc admet une borne inférieure notée m. Mais D est un fermé relatif de $[0,1]$ qui est fermé, donc D est fermé, et donc $m \in D$.
  On raisonne par l'absurde en supposant que $m \neq 0$.
- Par hypothèse, X est un ouvert relatif de A, donc il existe Ω ouvert tel que $X = \Omega \cap A$. Alors :
  $$\begin{aligned} D &= \varphi^{-1}(X) \\ &= \varphi^{-1}(\Omega \cap A) \\ &= \varphi^{-1}(\Omega) \text{ car } \varphi \text{ à valeurs dans } A \end{aligned}$$
  est un ouvert relatif de $[0,1]$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Comme D est un ouvert relatif de $[0,1]$, et que $m \in D$, il existe $\eta > 0$ tel que :
  $$]m - \eta, m + \eta[\cap [0,1] \subset D$$
  ce qui contredit la définition de la borne inférieure. C'est donc que $m = 0$, et donc $0 \in D$, i.e. $a = \varphi(0) \in X$.

On a montré que $X = \varnothing$ ou $X = A$. □

Corollaire. Une application continue, localement constante, sur une partie connexe par arcs, est constante.

Preuve. Soit $f : A \to F$ continue, localement constante, sur A connexe par arcs. Fixons $a \in A$. On note :
$$X = f^{-1}\big(\{f(a)\}\big) = \{x \in A,\ f(x) = f(a)\}$$

- $\{f(a)\}$ est fermé, et f est continue, donc X est un fermé relatif de A.
- f est localement constante, donc si $x \in X$, il existe $\eta > 0$ tel que :
  $$\forall y \in B(x,\eta) \cap A,\ f(y) = f(x)$$
  et donc, comme $f(x) = f(a)$, $B(x,\eta) \cap A \subset X$. On a montré que X est un ouvert relatif de A.

Par la propriété précédente, comme X est non vide car contient a, c'est que $X = A$, et donc f est constante sur A. □

4.2 Complément : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U connexe par arcs. Alors :
$$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. *On a déjà établi le résultat dans le cas où U est convexe.*

Preuve.

- Si f est constante, sa différentielle est nulle.
- Supposons que $\mathrm{d}f$ soit nulle sur U. Soit $a \in U$ et $X = \{b \in U,\ f(a) = f(b)\} = f^{-1}(\{f(a)\})$.
  Alors d'une part X est un fermé relatif de U comme image réciproque du fermé $\{f(a)\}$ par f continue.
  D'autre part, pour tout $x \in X$, $x \in U$ et U ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. La boule $B(x,r)$ étant convexe, et la différentielle de f étant nulle sur cette boule, f y est constante, égale à $f(x)$ et donc à $f(a)$. On a montré que $B(x,r) \subset X$, et donc que X est un ouvert.
  X étant à la fois ouvert et fermé relatif de U, et non vide, le résultat précédent s'applique et on en déduit que $X = U$. Par suite, f est constante sur U.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Intérieur, adhérence et connexité par arcs

48.1

Illustrer qu'il existe une partie A telle que :

(a) $\mathring{A}$ connexe par arc et A non connexe par arcs.

(b) A connexe par arcs et $\mathring{A}$ non connexe par arcs.

(c) $\overline{A}$ connexe par arcs et A non connexe par arcs.

Connexité de la somme de deux connexes par arcs

48.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, A et B deux parties connexes par arcs de E.

(a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.

(b) En déduire que $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$ est connexe par arcs.

Connexité de la réunion de convexes d'intersection non vide

48.3

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de E espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que, si $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \varnothing$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe par arcs.

Exercices

48.4

Est-ce que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

48.5

Est-ce que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

48.6

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

48.7

Soit E un espace normé de dimension finie, et A un partie non vide, connexe par arcs, de E. Montrer que si $f \ : \ A \to \{0,1\}$ est continue, alors f est constante.

Petits problèmes d'entrainement

48.8

Montrer que :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$$

est la réunion de deux composantes connexes par arcs.

48.9

Soit E un espace normé de dimension finie, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties connexes par arcs de E. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe par arcs.

48.10

Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective sur I intervalle de longueur non nulle. Montrer que f est strictement monotone.

48.11

On définit :

$$\begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \left(t^2 \cos \dfrac{1}{t}, t^2 \sin \dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable sur $[-1,1]$, et que $f'([-1,1])$ n'est pas connexe par arcs.
On pourra pour cela minorer la norme euclidienne de $f'(t)$.

48.12

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie connexe par arcs de E.

(a) Montrer que A ne peut pas être l'union disjointe de deux ouverts relatifs non vides de A.

(b) Montrer que A ne peut pas être l'union disjointe de deux fermés relatifs non vides de A.

48.13

Soit E un espace normé de dimension finie $n \geqslant 2$. Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

48.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M) > 0$.

(a) En utilisant le pivot de Gauss, montrer que toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvection et de dilatation.

(b) En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(c) Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

48.15

Montrer qu'il n'existe aucune application continue injective de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.

48.16

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie quelconque de E. On suppose que $(U_i)_{i\in I}$ est une partiition de A constitués d'ouverts relatifs de A (non vides) et connexes par arcs. Alors les U_i sont exactement les composantes connexes par arcs de A.

48.17

Soit E un espace normé de dimension finie, et A une partie de E. On appelle **extérieur** d'une partie l'intérieur de son complémentaire.
Montrer que, si C est une partie connexe par arcs qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A, alors C rencontre la frontière de A.

48.18

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^n$.

48.19

On définit :

$$A = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right),\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

Montrer que A est connexe par arcs, mais que $\overline{A}$ ne l'est pas.