Suites numériques

Je me souviens

1.1 Récurrence

1. Raconter ce qu'est une récurrence.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?
5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.
6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?
7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?
8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?
9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire ?
10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?
12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.
13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?
14. Que signifie « étudier une suite » ?
15. Citer le « théorème de convergence monotone ».
16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

1.4 Suites récurrentes

Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer ?
19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes ?
20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?
21. Qu'est-ce qu'une fonction lispschitzienne ? contractante ?
22. Si f est contractante et admet un point fixe a, qu'en déduire pour $(u_n)_n$?
23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?

1.5 Relation d'ordre

24. Qu'est-ce qui permet d'assurer l'existence d'une borne supérieure ?
25. Ça veut dire quoi, $\operatorname{Sup} A \leqslant 3$?
26. Qu'est qu'une relation d'ordre ?
27. Donner trois exemples de relation d'ordre.
28. Qu'est-ce qu'un ordre total ? partiel ?
29. Dans E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, on considère A une partie de E. Que signifie « A est majorée » ? « A admet un plus grand élément » ?
30. Y a-t-il unicité du plus grand élément quand il existe ?
31. On est d'accord pour ne pas parler de minorant, plus petit élément, partie bornée, etc.
32. Y a-t-il des résultats concernant les plus petits éléments, plus grands éléments, pour des parties de $\mathbb{N}$ muni de $\leqslant$?
33. Dans quel contexte parle-t-on de « borne supérieure » ?

Exercices et résultats classiques à connaître

Étudier une suite récurrente

510.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

510.2

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le théorème de Cesàro

510.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

Une suite définie de façon implicite

510.4

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan(x_n) = x_n$$

(b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} a\,n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercices de la banque CCINP

510.5 CCINP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

510.6 CCINP 55.2

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercices

510.7

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par :

(a) $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$, où $\theta \in [0, \pi]$

(b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$, $\forall n$

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)$

510.8

Étudier les limites des expressions suivantes :

(a) $\mathrm{e}^n - n$

(b) $\dfrac{n^3 + n + 1}{2n^2 + 1}$

(c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(d) $n^{\frac{1}{n}}$

(e) $(2 + \cos n)^{\frac{1}{n}}$

(f) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(g) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}$

510.9

Étudier les limites des expressions suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{(n+k)^2}$

510.10

Proposer dans chacun des cas un exemple de suite :

(a) qui n'est ni majorée, ni minorée

(b) qui est minorée, non majorée, et ne tends pas vers $+\infty$

(c) positive, de limite nulle, mais non décroissante

510.11

Exprimer le terme général de la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

(a) $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(b) $u_0 = 1$, $u_1 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$

(c) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

510.12

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$$

510.13

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$

510.14

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On s'intéresse aux suites de terme général :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, de limite x.

Petits problèmes d'entrainement

510.15 ✍

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On suppose $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

510.16 ✍

Soit $a > 0$ et $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

(c) En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.

(d) Peut-on exprimer cette majoration en fonction de a, u_0 et n ?

(e) On considère $a = u_0 = 2$. Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

510.17

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

510.18

En considérant $\sin(n+1)$, montrer que la suite $\big(\sin(n)\big)_n$ n'a pas de limite.

510.19

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, positive, décroissante et de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} u_k$$

Montrer la convergence de la suite $(S_n)_n$ en étudiant les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$.

510.20

En considérant, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{n\,n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

montrer que e est irrationnel.

510.21

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

et

$$a_n = nu_n^2 \text{ et } b_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)u_n^2$$

Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite strictement positive.

510.22

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

(a) Montrer que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0.

(b) La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

510.23

Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

510.24

Étudier la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$$

510.25

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

510.26

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, \pi[$.

(a) Justifier l'existence de :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt) - \cos(n\theta)}{\cos(t) - \cos(\theta)}\,\mathrm{d}t$$

(b) Exprimer $I_{n+1} - I_{n-1}$ en fonction de I_n pour $n \geqslant 1$.

(c) En déduire la valeur de I_n.

510.27

Soit $f\ :\ [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue, et $u_0 \in [a, b]$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On suppose de plus que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge.

510.28

On considère les fonctions f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$ et g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$. On définit $(u_n)_n$ par :

$$u_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} u_{2n+1}=f(u_{2n}) \\ u_{2n+2}=g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

Étudier la convergence de (u_n).

510.29

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)=-1+\sum_{k=1}^{n}x^k$$

(a) Montrer que P_n admet une unique racine positive, notée x_n, et que $0<x_n\leqslant 1$.

(b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.

(c) Montrer que $\ell=\dfrac{1}{2}$.

(d) Montrer que $x_n-\dfrac{1}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

510.30

Soit n un entier $\geqslant 3$ et f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=x^n-nx+1$$

(a) Montrer qu'il existe deux racines α_n et β_n de f_n telles que :

$$0<\alpha_n<1<\beta_n$$

(b) Montrer que $(\alpha_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(c) Montrer que $\alpha_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

(d) En considérant $f_n\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$, déterminer la limite ℓ de $(\beta_n)_n$.

(e) Déterminer un équivalent de $\ln(\beta_n)$, puis de $\beta_n-\ell$.