

Suites numériques

Je me souviens	2
1.1 Récurrence	2
1.2 Suite numérique, convergence, divergence	2
1.3 Suites remarquables	2
1.4 Suites récurrentes	2
1.5 Relation d'ordre	3
Exercices	4
Exercices et résultats classiques à connaître	4
Étudier une suite récurrente	4
Le théorème de Cesàro	4
Une suite définie de façon implicite	4
Exercices de la banque CCINP	5
Exercices	5
Petits problèmes d'entraînement	6

Je me souviens

1.1 Récurrence

1. Raconter ce qu'est une récurrence.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)$.

1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?
5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.
6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?
7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?
8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?
9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire ?
10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$?
11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?
12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.
13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?
14. Que signifie « étudier une suite » ?
15. Citer le « théorème de convergence monotone ».
16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

1.4 Suites récurrentes

Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer ?
19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes ?
20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?
21. Qu'est-ce qu'une fonction lipschitzienne ? contractante ?
22. Si f est contractante et admet un point fixe a , qu'en déduire pour $(u_n)_n$?
23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?

1.5 Relation d'ordre

24. Qu'est-ce qui permet d'assurer l'existence d'une borne supérieure ?
25. Ça veut dire quoi, $\text{Sup } A \leq 3$?
26. Qu'est qu'une relation d'ordre ?
27. Donner trois exemples de relation d'ordre.
28. Qu'est-ce qu'un ordre total ? partiel ?
29. Dans E muni d'une relation d'ordre $\preceq$, on considère A une partie de E . Que signifie « A est majorée » ? « A admet un plus grand élément » ?
30. Y a-t-il unicité du plus grand élément quand il existe ?
31. On est d'accord pour ne pas parler de minorant, plus petit élément, partie bornée, etc.
32. Y a-t-il des résultats concernant les plus petits éléments, plus grands éléments, pour des parties de $\mathbb{N}$ muni de $\leq$?
33. Dans quel contexte parle-t-on de « borne supérieure » ?

Exercices et résultats classiques à connaître

Étudier une suite récurrente

510.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

510.2

Étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le théorème de Cesàro

510.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

- (a) On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.
- (b) On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
- (c) Que penser de la réciproque ?

Une suite définie de façon implicite

510.4

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\tan(x_n) = x_n$$

- (b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercices de la banque CCINP

510.5
 **43**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 - Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

510.6
 **55.2**

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

Exercices

510.7

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par :

- $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, où $\theta \in [0, \pi]$

(b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$, $\forall n$

(c) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

(d) $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)$

510.8

Étudier les limites des expressions suivantes :

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| (a) $e^n - n$ | (c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | (f) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ |
| | (d) $n^{\frac{1}{n}}$ | |
| (b) $\frac{n^3 + n + 1}{2n^2 + 1}$ | (e) $(2 + \cos n)^{\frac{1}{n}}$ | (g) $\frac{e^{in\theta}}{n}$ |

510.9

Étudier les limites des expressions suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}}$ | (b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ | (c) $\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{(n+k)^2}$ |
|---|---|---|

510.10

Proposer dans chacun des cas un exemple de suite :

- qui n'est ni majorée, ni minorée
- qui est minorée, non majorée, et ne tends pas vers $+\infty$
- positive, de limite nulle, mais non décroissante

510.11

Exprimer le terme général de la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

- $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(b) $u_0 = 1$, $u_1 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$

(c) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

510.12

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$$

510.13

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$

510.14

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On s'intéresse aux suites de terme général :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, de limite x .

Petits problèmes d'entraînement

510.15

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' . On suppose $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

510.16

Soit $a > 0$ et $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

(c) En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a , u_1 et n .

(d) Peut-on exprimer cette majoration en fonction de a , u_0 et n ?

(e) On considère $a = u_0 = 2$. Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

510.17

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

510.18

En considérant $\sin(n+1)$, montrer que la suite $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite.

510.19

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, positive, décroissante et de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} u_k$$

Montrer la convergence de la suite $(S_n)_n$ en étudiant les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$.

510.20

En considérant, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{n n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

montrer que e est irrationnel.

510.21

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

et

$$a_n = n u_n^2 \text{ et } b_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) u_n^2$$

Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite strictement positive.

510.22

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

(a) Montrer que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0.

(b) La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

510.23

Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

510.24

Étudier la suite définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$$

510.25

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

510.26

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, \pi[$.

(a) Justifier l'existence de :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(n\theta)}{\cos(t) - \cos(\theta)} dt$$

(b) Exprimer $I_{n+1} - I_{n-1}$ en fonction de I_n pour $n \geq 1$.

(c) En déduire la valeur de I_n .

510.27

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue, et $u_0 \in [a, b]$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On suppose de plus que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que $(u_n)_n$ converge.

510.28

On considère les fonctions f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$. On définit $(u_n)_n$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

Étudier la convergence de (u_n) .

510.29

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$$

- (a) Montrer que P_n admet une unique racine positive, notée x_n , et que $0 < x_n \leq 1$.
- (b) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
- (c) Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$.

- (d) Montrer que $x_n - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

510.30

Soit n un entier ≥ 3 et f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n - nx + 1$$

- (a) Montrer qu'il existe deux racines α_n et β_n de f_n telles que :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

- (b) Montrer que $(\alpha_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.
- (c) Montrer que $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- (d) En considérant $f_n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, déterminer la limite ℓ de $(\beta_n)_n$.
- (e) Déterminer un équivalent de $\ln(\beta_n)$, puis de $\beta_n - \ell$.