Séries numériques

Je me souviens 2

Cours 3

1 Technique de comparaison série-intégrale . . . 3
2 Méthode d'éclatement . . . 4
3 Produit de Cauchy de deux séries . . . 4
4 Règle de d'Alembert . . . 4
5 Sommation des relations de comparaison . . . 5
5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes) . . . 5
5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles) . . . 5
6 Annexe : démonstrations . . . 6
6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison . . . 6

Exercices 7

Exercices et résultats classiques à connaître . . . 7
Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique . . . 7
Une transformation d'Abel . . . 7
Utiliser une comparaison série-intégrale . . . 8
Les séries de Bertrand . . . 8
Exercices du CCINP . . . 9
Exercices . . . 10
Petits problèmes d'entrainement . . . 11

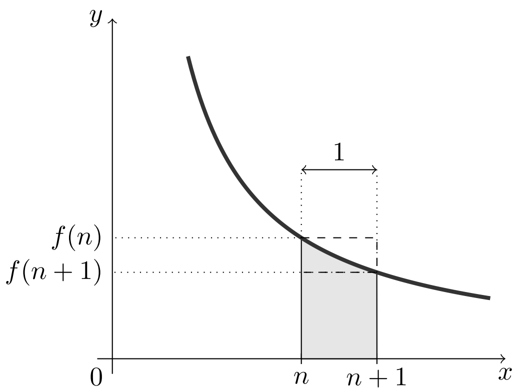
Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?
3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?
4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?
5. Le cas de la série géométrique ?
6. Le cas des séries de Riemann ?
7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?
8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?
9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

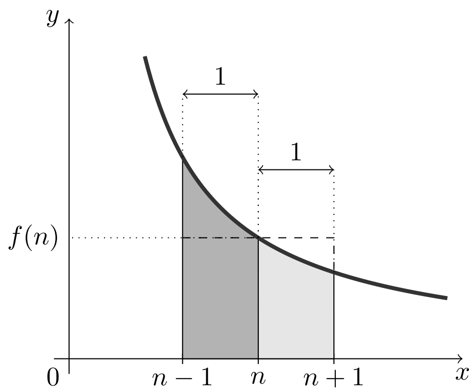
1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :



$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.

- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

> Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
> alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

> Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n, le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.
> D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. *Le théorème s'applique aussi à $\sum(-1)^{n+1}u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.*

Remarque. *Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :*

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.*

Remarque. *On peut aussi noter $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.*

Théorème.

> On conserve les notations de la définition.
> Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Montrer que : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$.

4 Règle de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers* 0.

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors on peut comparer les sommes partielles :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.*

Remarque. *Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\sum u_n$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\sum u_n$ converge.*

Remarque. *Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.*

6 Annexe : démonstrations

6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison

Preuve. (résultats sur les restes, en cas de convergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Par défintion du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M v_n$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}\forall p \geqslant n+1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} M v_k \\ &= M \sum_{k=n+1}^{p} v_k\end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geqslant n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par défintion du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon v_n$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}\forall p \geqslant n+1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k\end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geqslant n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Par le point précédent,

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k)}_{= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Cela signifie que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

□

Preuve. (résultats sur les sommes partielles, en cas de divergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Par défintion du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{M}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \frac{M}{2}\sum_{k=n_0}^{n} v_k \\ &= \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| - \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $K \leqslant \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a ainsi, pour tout $n \geqslant \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par défintion du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^{n} v_k \\ &= \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $K \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a ainsi, pour tout $n \geqslant \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ diverge. Par le point précédent,

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k)}_{=\ \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

Cela signifie que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

52.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.

*On note traditionnellement γ sa limite, appelée **constante d'Euler**, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Une transformation d'Abel

52.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

Utiliser une comparaison série-intégrale

52.3

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Les séries de Bertrand

52.4

Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$

(b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

(c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

(e) $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $u_n = \dfrac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

(g) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

Exercices du CCINP

52.5 CCINP 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

52.6 CCINP 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

52.7 CCINP 7.23

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

2. Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

52.8 CCINP 8.1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

52.9 CCINP 39.1

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

52.10 CCINP 46

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercices

52.11

Déterminer la nature des séries :

(a) $\sum \cos n$

(b) $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(c) $\sum \frac{1}{n+n^2}$

(d) $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

(e) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$

(f) $\sum \frac{\ln\sqrt{n}}{n+1}$

52.12

Déterminer la nature de la série :

(a) $\sum \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(b) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(c) $\sum \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

52.13

Déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$

52.14

Déterminer les valeurs du réel x pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ est convergente.

52.15

Déterminer la nature des séries de terme général :

(a) $a_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n}$

(b) $b_n = (-1)^n \text{Arcsin}\frac{1}{n}$

(c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+(-1)^{n+1}}$

(d) $d_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(e) $e_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

(f) $f_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$

52.16

Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, calculer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

52.17

Montrer l'existence et calculer :
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

52.18

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que :
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

52.19

(a) Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

52.20

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général :

$$u_n = \ln(n+1) + \alpha \ln(n+2) + \beta \ln(n+3)$$

converge et calculer sa somme.

52.21

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

52.22

Montrer la convergence et calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-2n} \operatorname{ch} n$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n+1)3^{-n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$ où $\mathrm{i}^2=-1$.

52.23

Étudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

52.24

Déterminer un équivelent simple au voisinage de $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Petits problèmes d'entrainement

52.25 ✍

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

(d) Déterminer le domaine de définition de S.

52.26 ✍

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

52.27

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

52.28

On considère la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, appelée *série harmonique alternée*.

(a) Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.

(b) Montrer que cette série est convergente.

(c) En remarquant que $\displaystyle\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$, calculer la somme de cette série.

(d) En déduire un encadrement de $\ln 2$, à 10^{-1} près, à l'aide de deux rationnels.

52.29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la limite de la suite (u_n), puis la nature de la série de terme général u_n.
On rappelle que $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Séries numériques, focus sur la sommation des relations de comparaison

Cours 2
5 Sommation des relations de comparaison . . . 2
5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes) . . . 2
5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles) . . . 2
6 Annexes . . . 3
6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison . . . 3

Exercices 4
Exercices et résultats classiques à connaître . . . 4
Utiliser la sommation des relations de comparaison . . . 4
Exercices . . . 5
Petits problèmes d'entrainement . . . 5

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers* 0.

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers* $+\infty$.

Remarque. *Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de* $\sum u_n$*, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque* $\sum u_n$ *converge.*

Remarque. *Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.*

6 Annexes

6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison

Preuve. *(résultat sur les restes, en cas de convergence)*

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Par défintion du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M v_n$$
On a donc, pour $n \geqslant n_0$:
$$\begin{aligned}\forall p \geqslant n+1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} M v_k \\ &= M \sum_{k=n+1}^{p} v_k\end{aligned}$$
et donc, en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans les inégalités larges :
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$
Ceci est vrai pour tout $n \geqslant n_0$. On a montré, en revenant à la définition :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par défintion du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon v_n$$
On a donc, pour $n \geqslant n_0$:
$$\begin{aligned}\forall p \geqslant n+1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k\end{aligned}$$
et donc, en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans les inégalités larges :
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$
Ceci est vrai pour tout $n \geqslant n_0$. On a montré, en revenant à la définition :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Par le point précédent,
$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k)}_{\displaystyle = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
Cela signifie que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

□

Preuve. *(résultat sur les sommes partielles, en cas de divergence)*

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Par défintion du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{M}{2} v_n$$
On a donc, pour $n \geqslant n_0$:
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \frac{M}{2}\sum_{k=n_0}^{n} v_k \\ &= \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| - \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$
Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $K \leqslant \dfrac{M}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
On a ainsi, pour tout $n \geqslant \mathrm{Max}(n_0, n_1)$:
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} v_k$$
On a montré, en revenant à la définition :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$
- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par défintion du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$$
On a donc, pour $n \geqslant n_0$:
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0}^{n} v_k \\ &= \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$
Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $K \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a ainsi, pour tout $n \geqslant \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ diverge. Par le point précédent,

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

$$\| $$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Cela signifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Utiliser la sommation des relations de comparaison

52.46

On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.

(a) Donner un équivalent simple de S_n.

(b) Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = \ln(n) + C + \mathrm{o}(1)$$

Exercices

52.47

Comparer l'ordre de grandeur du reste d'ordre n des séries :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

que l'on peut déduire du théorème des séries alternées avec celui qu'on peut déduire de la sommation des relations de comparaison.

52.48

En notant $a_n = (-1)^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a $u_n = \mathrm{o}(a_n)$ et la série $\sum a_n$ diverge. Expliquer pourquoi on a pourtant :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ln(n) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} = \mathrm{O}(1)$$

51.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

Petits problèmes d'entrainement

52.26 ✍

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

52.49

On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$.

(a) Montrer que $(S_n)_n$ converge.

(b) Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = C - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

52.50

On considère la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) En envisageant u_n^2, déterminer un équivalent de u_n.

52.51

Déterminer un équivalent de :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$

(b) $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$