

## Séries numériques

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
<b>Cours</b>	<b>3</b>
1 Technique de comparaison série-intégrale . . . . .	3
2 Méthode d'éclatement . . . . .	4
3 Produit de Cauchy de deux séries . . . . .	4
4 Règle de d'Alembert . . . . .	4
5 Sommation des relations de comparaison . . . . .	5
5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes) . . . . .	5
5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles) . . . . .	5
6 Annexe : démonstrations . . . . .	6
6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison . . . . .	6
<b>Exercices</b>	<b>7</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	7
Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique . . . . .	7
Une transformation d'Abel . . . . .	7
Utiliser une comparaison série-intégrale . . . . .	8
Les séries de Bertrand . . . . .	8
Exercices du CCINP . . . . .	9
Exercices . . . . .	10
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	11

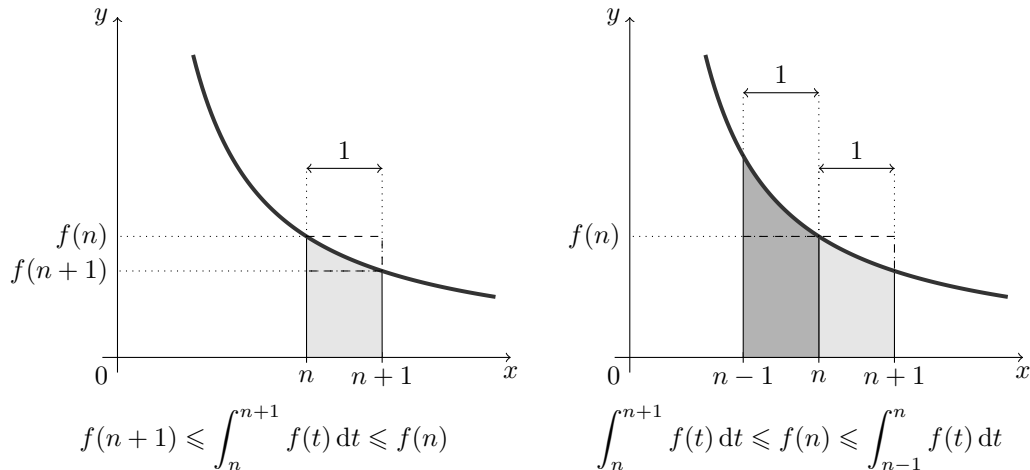
**Je me souviens**

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?
3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?
4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?
5. Le cas de la série géométrique ?
6. Le cas des séries de Riemann ?
7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?
8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?
9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

# 1 Technique de comparaison série-intégrale

**Technique de comparaison.** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de  $f$ , on a :



- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \int_{n_0-1}^N f(t) dt$$

- Si la série  $\sum f(n)$  converge, alors l'intégrale  $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$  converge.
- Si l'intégrale  $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$  converge, alors la série  $\sum f(n)$  converge.
- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de  $\sum f(n)$  :

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de  $\sum f(n)$  permet souvent d'obtenir un équivalent.
- Ces inégalités s'adaptent au cas où  $f$  est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

**Exemple.** Déterminer un équivalent simple de  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_n$ .

## 2 Méthode d'éclatement

### Théorème des séries alternées.

Si  $(u_n)_n$  est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série alternée  $\sum(-1)^n u_n$  converge.

### Résultat complémentaire.

Si la série alternée  $\sum(-1)^n u_n$  vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout  $n$ , le reste  $R_n$  a le signe de  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  et  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .  
D'autre part, la somme  $S$  est encadrée par deux sommes partielles successives.

**Remarque.** Le théorème s'applique aussi à  $\sum(-1)^{n+1} u_n$ , ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

**Remarque.** Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :

**Exemple.** Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$  ?

Et à celle de terme général  $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$  ?

## 3 Produit de Cauchy de deux séries

**Définition.** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série  $\sum w_n$  où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

**Remarque.** Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.

**Remarque.** On peut aussi noter  $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ .

### Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent absolument, alors  $\sum w_n$  converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

**Exemple.** Étudier la série de terme général  $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$ .

**Exemple.** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Montrer que :  $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ .

## 4 Règle de d'Alembert

**Remarque.** Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

**Règle de d'Alembert.** Soit  $\sum u_n$  une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

1. Si  $\ell < 1$ , alors la série  $\sum u_n$  converge absolument.
2. Si  $\ell > 1$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
3. Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Exemple.** Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

## 5 Sommation des relations de comparaison

### 5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

**Théorème.**

Soit  $(u_n)_n$  une suite réelle ou complexe, et  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs.

- Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si  $(u_n)_n$  est aussi une suite de réels positifs,  $u_n \sim v_n$  et  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

**Remarque.** Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

### 5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

**Théorème.**

Soit  $(u_n)_n$  une suite réelle ou complexe, et  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs.

- Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si  $(u_n)_n$  est aussi une suite de réels positifs,  $u_n \sim v_n$  et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum u_n$  diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

**Remarque.** Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers  $+\infty$ .

**Remarque.** Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de  $\sum u_n$ , mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque  $\sum u_n$  converge.

**Remarque.** Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.

## 6 Annexe : démonstrations

### 6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison

*Preuve. (résultats sur les restes, en cas de convergence)*

- On suppose que  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge. Par définition du  $O(v_n)$ , il existe  $M > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq Mv_n$$

On a donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p Mv_k \\ &= M \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque  $p \rightarrow +\infty$  dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout  $n \geq n_0$ . On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge. Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par définition du  $o(v_n)$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$$

On a donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque  $p \rightarrow +\infty$  dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout  $n \geq n_0$ . On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que  $(u_n)_n$  est une suite de réels positifs, que  $u_n \sim v_n$ , i.e.  $u_n - v_n = o(v_n)$ , et que  $\sum v_n$  converge. Par le point précédent,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

||

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Cela signifie que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ .

□

*Preuve. (résultats sur les sommes partielles, en cas de divergence)*

- On suppose que  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  diverge. Par définition du  $O(v_n)$ , il existe  $M > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{M}{2} v_n$$

On a donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{M}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $\sum v_n$  est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend

vers  $+\infty$ . Il existe donc  $n_1$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ ,  

$$K \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k.$$

On a ainsi, pour tout  $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$  :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  diverge. Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par définition du  $o(v_n)$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

On a donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k}_{\text{constante notée } K} \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $\sum v_n$  est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers  $+\infty$ . Il existe donc  $n_1$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ ,  

$$K \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k.$$

On a ainsi, pour tout  $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$  :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que  $(u_n)_n$  est une suite de réels positifs, que  $u_n \sim v_n$ , i.e.  $u_n - v_n = o(v_n)$ , et que  $\sum v_n$  diverge. Par le point précédent,

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$$

||

$$\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k$$

Cela signifie que  $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$ .

□

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

#### 52.1

On considère la suite  $(u_n)_n$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que  $(u_n)_n$  converge.

On note traditionnellement  $\gamma$  sa limite, appelée **constante d'Euler**, et on a donc établi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

### Une transformation d'Abel

#### 52.2

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \sin k$ .

(a) Montrer que  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  est bornée.

(b) En déduire que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin k}{k}$  converge.

### Utiliser une comparaison série-intégrale

---

**52.3**

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

### Les séries de Bertrand

---

**52.4**Étudier la série numérique  $\sum u_n$  lorsque :

(a)  $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

(b)  $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

(c)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d)  $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

(e)  $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

(f)  $u_n = \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

(g)  $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$



## Exercices du CCINP

52.5

 5

1. On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  où  $n \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(a) **Cas**  $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de  $u_n$ , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas**  $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

**Indication** : on pourra utiliser la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

2. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

52.6

 6

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs et  $\ell$  un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , alors la série  $\sum u_n$  converge.

**Indication** : écrire, judicieusement, la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , puis majorer, pour  $n$  assez grand,  $u_n$  par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$  ?

52.7

 7.23

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang.

2. Dans cette question, on suppose que  $(v_n)$  est positive. Prouver que :  
 $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

3. Étudier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$ .

**Remarque** :  $i$  désigne le nombre complexe de carré égal à  $-1$ .

52.8

 8.1

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série  $\sum (-1)^k u_k$  est convergente.

**Indication** : on pourra considérer  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série  $\sum (-1)^k u_k$ .

52.9

 39.1

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que la série  $\sum x_n^2$  converge.

1. (a) Démontrer que, pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , la série  $\sum x_n y_n$  converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

(b) Démontrer que  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

52.10

 46

On considère la série :  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ .

1. Prouver que, au voisinage de  $+\infty$  :

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$  converge.

3.  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$  converge-t-elle absolument ?

## Exercices

### 52.11

Déterminer la nature des séries :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum \cos n & \text{(c)} \sum \frac{1}{n+n^2} & \text{(e)} \sum \frac{\ln n}{n^2} \\ \text{(b)} \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \text{(d)} \sum \frac{(-1)^n}{n!} & \text{(f)} \sum \frac{\ln \sqrt{n}}{n+1} \end{array}$$

### 52.12

Déterminer la nature de la série :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \text{(c)} \sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ \text{(b)} \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} & \end{array}$$

### 52.13

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$

### 52.14

Déterminer les valeurs du réel  $x$  pour lesquels la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$  est convergente.

### 52.15

Déterminer la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} & \text{(d)} d_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) \\ \text{(b)} b_n = (-1)^n \operatorname{Arcsin} \frac{1}{n} & \text{(e)} e_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \\ \text{(c)} c_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + (-1)^{n+1}} & \text{(f)} f_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \end{array}$$

### 52.16

Sachant que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

### 52.17

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

### 52.18

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrer que :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$$

**52.19**(a) Vérifier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

**52.20**Déterminer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  pour que la série de terme général :

$$u_n = \ln(n+1) + \alpha \ln(n+2) + \beta \ln(n+3)$$

converge et calculer sa somme.

**52.21**

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad \left| \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \right.$$

**52.22**

Montrer la convergence et calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 0} e^{-2n} \operatorname{ch} n \quad \left| \quad (e) \sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right.$$

$$(b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \left| \quad (f) \sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n} \right.$$

$$(c) \sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n} \quad \left| \quad (g) \sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1} \text{ où } i^2 = -1. \right.$$

$$(d) \sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

**52.23**


Étudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

**52.24**Déterminer un équivalent simple au voisinage de  $n \rightarrow +\infty$  de :

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \quad \left| \quad (b) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right.$$

### Petits problèmes d'entraînement

**52.25** 

On définit, sous réserve d'existence :


$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} e^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ .(d) Déterminer le domaine de définition de  $S$ .

**52.26** 

Déterminer un équivalent simple au voisinage de  $n \rightarrow +\infty$  de :

$$(a) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$$

**52.27**

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

**52.28**

On considère la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ , appelée *série harmonique alternée*.

- Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.
- Montrer que cette série est convergente.
- En remarquant que  $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ , calculer la somme de cette série.
- En déduire un encadrement de  $\ln 2$ , à  $10^{-1}$  près, à l'aide de deux rationnels.

**52.29**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de terme général  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$ . Déterminer

la limite de la suite  $(u_n)$ , puis la nature de la série de terme général  $u_n$ .

On rappelle que  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .