

Séries numériques

Je me souviens	2
Cours	3
1 Technique de comparaison série-intégrale	3
2 Méthode d'éclatement	4
3 Produit de Cauchy de deux séries	4
4 Règle de d'Alembert	4
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique	5
Une transformation d'Abel	5
Utiliser une comparaison série-intégrale	5
Les séries de Bertrand	5
Exercices du CCINP	7
Exercices	8
Petits problèmes d'entraînement	10

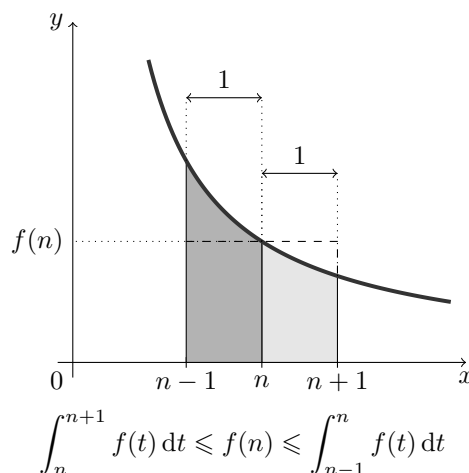
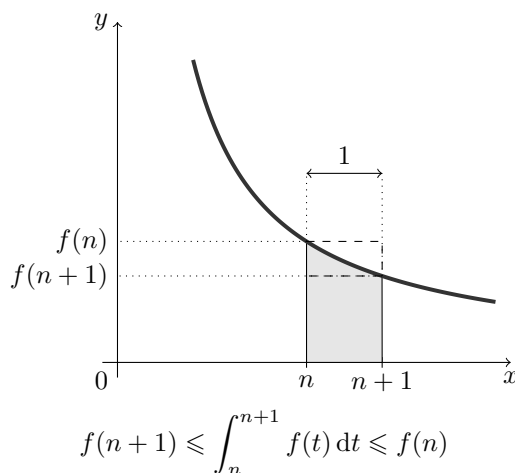
Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?
3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?
4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?
5. Le cas de la série géométrique ?
6. Le cas des séries de Riemann ?
7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?
8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?
9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f , on a :



- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \int_{n_0-1}^N f(t) dt$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.
- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.
- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_n$.

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n , le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. Le théorème s'applique aussi à $\sum (-1)^{n+1} u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Remarque. Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$?

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complète éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

4 Règle de d'Alembert

Remarque. Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

520.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.

On note traditionnellement γ sa limite, appelée **constante d'Euler**, et on a donc établi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Une transformation d'Abel

520.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \sin k$.

- (a) Montrer que $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
- (b) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

Utiliser une comparaison série-intégrale

520.3

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Les séries de Bertrand

520.4

Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

(b) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

(c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d) $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

(e) $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $u_n = \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

(g) $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

Exercices du CCINP

520.5
 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas** $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

520.6
 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

520.7
 7.23

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

2. Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :
 $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

520.8
 8.1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

520.9
 39.1

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

520.10
 46

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercices

520.11

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\frac{\ln n}{n^5}$	(d) $\ln\left(\frac{3 + \sin \frac{1}{n}}{3 - \sin \frac{1}{n}}\right)$
(b) $e^{-\sqrt{3+n}}$	(e) $\frac{n + e^{-n}}{(n+1)^3}$
(c) $\frac{n^4 \ln(5n)}{e^{2n}}$	(f) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

520.12

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\sqrt{n^2 - 1} - n$	(d) $\frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$
(b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$	(e) $e^{-(\frac{3}{2} + \frac{3}{n}) \ln n}$
(c) $\frac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$	(f) $(-1)^n n e^{-n}$

520.13

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $n \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n$	(d) $\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{x+1} dx$
(b) $n^{1/n}$	(e) $e^{-\sqrt{n}}$
(c) $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$	(f) $e^{-\sqrt{\ln n}}$

520.14

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\frac{\sin n}{n^2 + 1}$	(d) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
(b) $\frac{3n+1}{n^3 + \cos n}$	(e) $\frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$
(c) $\frac{1}{(\ln n)^p}$ où $p \in \mathbb{N}$	(f) $\sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

520.15

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$	(d) $(-1)^n e^{1/n}$
(b) $(-1)^n \exp(\sqrt{6n+5} - n)$	(e) $\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$
(c) $\frac{\ln(n) + (-1)^n \ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$	(f) $\ln(n) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

520.16

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$	(d) $\frac{(-1)^n \ln(n)+1}{n \ln(n)}$
(b) $(-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$	(e) $\frac{n+1}{\sqrt{n} - (-1)^n n}$
(c) $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$	(f) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$

520.17

Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

520.18

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

520.19

(a) Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

520.20

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général :

$$u_n = \ln(n+1) + \alpha \ln(n+2) + \beta \ln(n+3)$$

converge et calculer sa somme.

520.21

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$(b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

520.22

Montrer la convergence et calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 0} e^{-2n} \operatorname{ch} n$$

$$(b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(c) \sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$$

$$(d) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$(e) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$(f) \sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$$

$$(g) \sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1} \text{ où } i^2 = -1.$$

520.23

Étudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

520.24

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \rightarrow +\infty$ de :

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

$$(b) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Petits problèmes d'entraînement

520.25

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} e^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

(d) Déterminer le domaine de définition de S .

520.26

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation :

$$\ln(x) = \operatorname{Arctan}(x) + n\pi$$

admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n . Quelle est la limite de $(x_n)_n$?

(b) Montrer que la série de terme générale $\frac{1}{x_n}$ est convergente.

520.27

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

520.28

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

(a) Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) En utilisant la série $\sum (u_n - u_{n+1})$, montrer que la série $\sum u_n^3$ est convergente.

(c) Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont divergentes.

520.29

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

(a) Étudier, en discutant selon la valeur de u_0 , la suite $(u_n)_n$.

(b) Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

520.30

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

(b) Étudier la convergence et donner la somme de la série $\sum u_n^2$.

(c) Étudier la convergence de la série $\sum \ln(1 - u_n)$.

(d) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?