Séries numériques

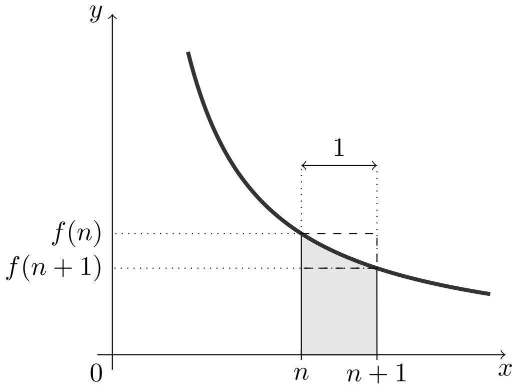
Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?
3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?
4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?
5. Le cas de la série géométrique ?
6. Le cas des séries de Riemann ?
7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?
8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?
9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

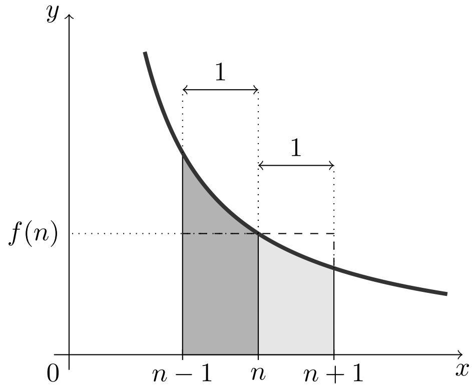
1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :



$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.

- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n, le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.
D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. *Le théorème s'applique aussi à $\sum(-1)^{n+1}u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.*

Remarque. *Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :*

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.*

Remarque. *On peut aussi noter $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.*

Théorème.

On conserve les notations de la définition.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Montrer que : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$.

4 Règle de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

520.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.
On note traditionnellement γ sa limite, appelée ***constante d'Euler****, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Une transformation d'Abel

520.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

Utiliser une comparaison série-intégrale

520.3

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Les séries de Bertrand

520.4

Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$

(b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

(c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

(e) $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $u_n = \dfrac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

(g) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

Exercices du CCINP

520.5 CCINP 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

520.6 CCINP 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

520.7 CCINP 7.23

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

2. Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

520.8 CCINP 8.1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

520.9 CCINP 39.1

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

520.10 CCINP 46

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercices

520.11

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\dfrac{\ln n}{n^5}$

(b) $\mathrm{e}^{-\sqrt{3+n}}$

(c) $\frac{n^4\ln(5n)}{\mathrm{e}^{2n}}$

(d) $\ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$

(e) $\dfrac{n+\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^3}$

(f) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

520.12

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\sqrt{n^2-1}-n$

(b) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$

(c) $\dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$

(d) $\frac{\mathrm{e}^{-2n}+n}{n^3+1}$

(e) $\mathrm{e}^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{n}\right)\ln n}$

(f) $(-1)^n n\mathrm{e}^{-n}$

520.13

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $n\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

(b) $n^{1/n}$

(c) $\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(e) $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

(f) $\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$

520.14

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\dfrac{\sin n}{n^2+1}$

(b) $\frac{3n+1}{n^3+\cos n}$

(c) $\dfrac{1}{(\ln n)^p}$ où $p\in\mathbb{N}$

(d) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

(e) $\dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

(f) $\sin\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

520.15

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$

(b) $(-1)^n\exp(\sqrt{6n+5}-n)$

(c) $\dfrac{\ln(n)+(-1)^n\ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$

(d) $(-1)^n\mathrm{e}^{1/n}$

(e) $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$

(f) $\ln(n)\ \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

520.16

Étudier la nature de la série de terme général :

(a) $\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{n}\right)$

(b) $(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$

(c) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$

(d) $\frac{(-1)^n\ln(n)+1}{n\ln(n)}$

(e) $\frac{n+1}{\sqrt{n}-(-1)^n n}$

(f) $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}\sin x\,\mathrm{d}x$

520.17

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

520.18

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

520.19

(a) Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

520.20

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général :

$$u_n = \ln(n+1) + \alpha\ln(n+2) + \beta\ln(n+3)$$

converge et calculer sa somme.

520.21

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

520.22

Montrer la convergence et calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-2n}\operatorname{ch} n$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n+1)3^{-n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$ où $\mathrm{i}^2=-1$.

520.23

Étudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

520.24

Déterminer un équivelent simple au voisinage de $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Petits problèmes d'entrainement

520.25 ✍

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

(d) Déterminer le domaine de définition de S.

520.26 ✍

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation :

$$\ln(x) = \mathrm{Arctan}(x) + n\pi$$

admet une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée x_n. Quelle est la limite de $(x_n)_n$?

(b) Montrer que la série de terme générale $\dfrac{1}{x_n}$ est convergente.

520.27

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

520.28

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$$

(a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) En utilisant la série $\sum(u_n - u_{n+1})$, montrer que la série $\sum u_n^3$ est convergente.

(c) Montrer que les séries $\sum \ln\left(\dfrac{\sin u_n}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont divergentes.

520.29

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$$

(a) Étudier, en discutant selon la valeur de u_0, la suite $(u_n)_n$.

(b) Étudier la nature de la série $\sum(-1)^n u_n$.

520.30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in]0,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

(b) Étudier la convergence et donner la somme de la série $\sum u_n^2$.

(c) Étudier la convergence de la série $\sum \ln(1-u_n)$.

(d) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

520.31

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suite de réels strictements positifs.

(a) On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$.

(b) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de la série $\sum u_n$.

(c) On suppose maintenant qu'il existe $\alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer la divergence de la série $\sum u_n$.

(d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence absolue de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$$

520.32

Soit p_n le n-ème nombre entier dont l'écriture décimale ne comporte pas le chiffre 9. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$.

520.33

Soit p_n le n-ème nombre premier. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ diverge.

520.34

Étudier la nature de la série :

$$\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$$

520.35

Déterminer un équivalent simple du reste de la série harmonique alternée :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

520.36

Former un développement asymptotique à deux termes de :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

520.37

Pour $x > 0$, on pose :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n f(n)$.

(b) Montrer la convergence de la série de terme général :

$$v_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t,\ n \geqslant 2$$

On admet qu'il existe une constante réelle γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

(c) En étudiant la quantité :

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

exprimer en fonction de γ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$.

520.38

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

520.39

Justifier l'existence et calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

520.40

Soit u une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \sqrt{u_{2n}u_n}$.

520.41

(a) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante de limite nulle.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

(b) Utiliser le résultat précédent pour redémontrer le critère de convergence des séries de Riemann.

520.42

On considère la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$.

(a) Déterminer les variations de $(I_n)_n$.

(b) Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On pourra pour cela découper l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0,\alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Montrer que la série $\sum(-1)^n I_n$ converge, et calculer sa somme.

520.43

(a) Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

(b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + \mathrm{o}(1)$$

(c) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$.

520.44

On dit que la série de terme général u_n **enveloppe** le réel A si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leqslant |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle **enveloppe strictement** le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $]0,1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

(a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

(b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

(c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors, elle enveloppe strictement A.

(d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A.