

Séries numériques, focus sur la sommation des relations de comparaison

Cours	2
5 Sommation des relations de comparaison	2
5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)	2
5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)	2
6 Annexes	3
6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison	3
Exercices	4
Exercices et résultats classiques à connaître	4
Le théorème de Cesàro	4
Utiliser la sommation des relations de comparaison	4
Exercices	5
Petits problèmes d'entraînement	5

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\sum u_n$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\sum u_n$ converge.

Remarque. Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.

6 Annexes

6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison

Preuve. (résultat sur les restes, en cas de convergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Par définition du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p M v_k \\ &= M \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Par le point précédent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) &= o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right) \\ &\parallel \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \end{aligned}$$

Cela signifie que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

□

Preuve. (résultat sur les sommes partielles, en cas de divergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Par définition du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{M}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{M}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $K \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k$.

On a ainsi, pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $K \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k$.

On a ainsi, pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ diverge. Par

le point précédent,

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

||

$$\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k$$

Cela signifie que $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Le théorème de Cesàro

510.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

- On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.
- On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
- Que penser de la réciproque ?

Utiliser la sommation des relations de comparaison

521.1

On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

- Donner un équivalent simple de S_n .
- Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = \ln(n) + C + o(1)$$

Exercices

521.2

Comparer l'ordre de grandeur du reste d'ordre n des séries :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

que l'on peut déduire du théorème des séries alternées avec celui qu'on peut déduire de la sommation des relations de comparaison.

521.3

En notant $a_n = (-1)^n$ et $u_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n = o(a_n)$ et la série $\sum a_n$ diverge. Expliquer pourquoi on a pourtant :

$$\sum_{k=1}^n u_k \sim \ln(n) \text{ et } \sum_{k=1}^n = O(1)$$

Petits problèmes d'entraînement

521.4 

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \rightarrow +\infty$ de :

(a) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$

521.5

On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$.

(a) Montrer que $(S_n)_n$ converge.

(b) Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

521.6

On considère la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) En envisageant u_n^2 , déterminer un équivalent de u_n .

521.7

Déterminer un équivalent de :

(a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$

(b) $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$