

Séries numériques

Je me souviens	2
Cours	3
1 Technique de comparaison série-intégrale	3
2 Méthode d'éclatement	4
3 Produit de Cauchy de deux séries	4
4 Règle de d'Alembert	4
5 Sommation des relations de comparaison	5
5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)	5
5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)	5
6 Annexe : démonstrations	6
6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison	6
Exercices	7
Exercices et résultats classiques à connaître	7
Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique	7
Une transformation d'Abel	7
Utiliser une comparaison série-intégrale	8
Les séries de Bertrand	8
Exercices du CCINP	9
Exercices	10
Petits problèmes d'entraînement	11

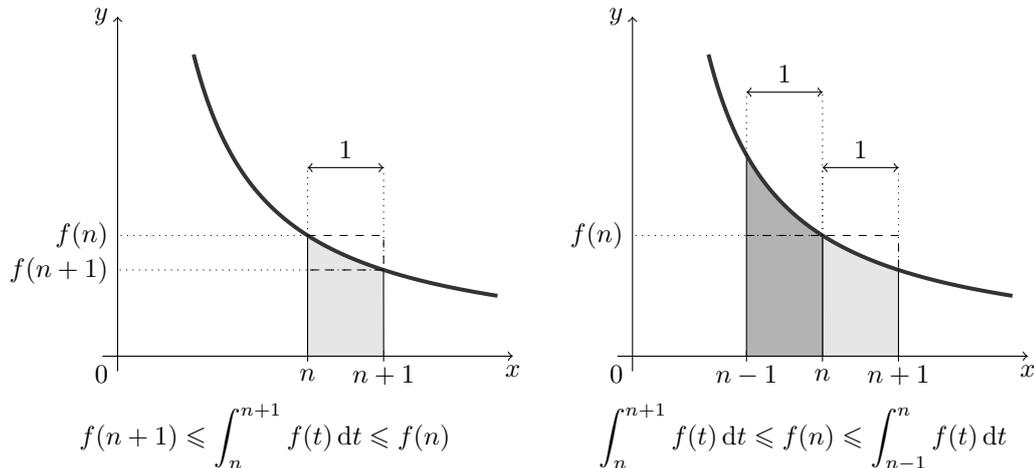
Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?
3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?
4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?
5. Le cas de la série géométrique ?
6. Le cas des séries de Riemann ?
7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?
8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?
9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f , on a :



- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \int_{n_0-1}^N f(t) dt$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge.
- Si l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.
- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.
- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_n$.

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n , le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. Le théorème s'applique aussi à $\sum (-1)^{n+1} u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Remarque. Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$?

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

4 Règle de d'Alembert

Remarque. Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\sum u_n$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\sum u_n$ converge.

Remarque. Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.

6 Annexe : démonstrations

6.1 Annexe : démonstration de la sommation des relations de comparaison

Preuve. (résultats sur les restes, en cas de convergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Par définition du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq Mv_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p Mv_k \\ &= M \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \forall p \geq n+1, \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans les inégalités larges :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$. On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Par le point précédent,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

||

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Cela signifie que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

□

Preuve. (résultats sur les sommes partielles, en cas de divergence)

- On suppose que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Par définition du $O(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{M}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{M}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k}_{\text{constante notée } K} \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend

vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$K \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n v_k.$$

On a ainsi, pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du $o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

On a donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{constante notée } K} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum v_n$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$K \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k.$$

On a ainsi, pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$:

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

On a montré, en revenant à la définition :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, que $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ diverge. Par le point précédent,

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

||

$$\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k$$

Cela signifie que $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

52.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.

On note traditionnellement γ sa limite, appelée **constante d'Euler**, et on a donc établi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Une transformation d'Abel

52.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

Utiliser une comparaison série-intégrale

52.3

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Les séries de Bertrand

52.4Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

(b) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

(c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d) $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

(e) $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $u_n = \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

(g) $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

Exercices du CCINP

52.5

 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas** $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

52.6

 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

52.7

 7.23

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

2. Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :
 $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

52.8

 8.1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

52.9

 39.1

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

52.10

 46

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercices

52.11

Déterminer la nature des séries :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum \cos n & \text{(c)} \sum \frac{1}{n+n^2} & \text{(e)} \sum \frac{\ln n}{n^2} \\ \text{(b)} \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \text{(d)} \sum \frac{(-1)^n}{n!} & \text{(f)} \sum \frac{\ln \sqrt{n}}{n+1} \end{array}$$

52.12

Déterminer la nature de la série :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \text{(c)} \sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ \text{(b)} \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} & \end{array}$$

52.13

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$

52.14

Déterminer les valeurs du réel x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ est convergente.

52.15

Déterminer la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} & \text{(d)} d_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) \\ \text{(b)} b_n = (-1)^n \operatorname{Arcsin} \frac{1}{n} & \text{(e)} e_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \\ \text{(c)} c_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + (-1)^{n+1}} & \text{(f)} f_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \end{array}$$

52.16

Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

52.17

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

52.18

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$$

52.19(a) Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

52.20Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général :

$$u_n = \ln(n+1) + \alpha \ln(n+2) + \beta \ln(n+3)$$

converge et calculer sa somme.

52.21

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad \left| \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \right.$$

52.22

Montrer la convergence et calculer la somme de :

$$(a) \sum_{n \geq 0} e^{-2n} \operatorname{ch} n \quad \left| \quad (e) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right.$$

$$(b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \left| \quad (f) \sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n} \right.$$

$$(c) \sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n} \quad \left| \quad (g) \sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1} \text{ où } i^2 = -1. \right.$$

$$(d) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

52.23

Étudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

52.24Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \rightarrow +\infty$ de :

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \quad \left| \quad (b) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right.$$

Petits problèmes d'entraînement

52.25 ✎

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} e^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.(d) Déterminer le domaine de définition de S .

52.26 

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \rightarrow +\infty$ de :

$$(a) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$$

52.27

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

52.28

On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, appelée *série harmonique alternée*.

- Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.
- Montrer que cette série est convergente.
- En remarquant que $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$, calculer la somme de cette série.
- En déduire un encadrement de $\ln 2$, à 10^{-1} près, à l'aide de deux rationnels.

52.29

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer

la limite de la suite (u_n) , puis la nature de la série de terme général u_n .

On rappelle que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

52.30

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suite de réels strictements positifs.

- On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$.

- On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de la série $\sum u_n$.

- On suppose maintenant qu'il existe $\alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer la divergence de la série $\sum u_n$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence absolue de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!}$$

52.31

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

- Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.
- Étudier la convergence et donner la somme de la série $\sum u_n^2$.
- Étudier la convergence de la série $\sum \ln(1 - u_n)$.
- Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

52.32

Former un développement asymptotique à deux termes de :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

52.33

Pour $x > 0$, on pose :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f(n)$.

(b) Montrer la convergence de la série de terme général :

$$v_n = f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt, \quad n \geq 2$$

On admet qu'il existe une constante réelle γ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

(c) En étudiant la quantité :

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

exprimer en fonction de γ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$.

52.34

Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]}{n}$$

52.35

Justifier l'existence et calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

52.36

On considère la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

(a) Exprimer $\sin(\theta - n\pi)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

(b) Montrer que $\sum u_n$ est alternée et étudier sa convergence.

52.37

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sin \left(\pi \left(3 + \sqrt{5} \right)^n \right)$$

On pourra pour cela montrer que, pour tout entier n ,

$$a_n = \left(3 + \sqrt{5} \right)^n + \left(3 - \sqrt{5} \right)^n \in 2\mathbb{N}$$

puis comparer $|u_n|$ au terme général d'une série géométrique.

52.38

On pose

$$u_n = \cos \left(\pi \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn} \right)$$

À quelle condition portant sur a et b la série de terme général u_n est-elle convergente ?

52.39

(a) Montrer que la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n$ est convergente.

(b) Montrer que $\forall n \geq 2, \forall p \geq n, \frac{u_{p+1}}{u_p} \leq \frac{n+3}{2(n+1)}$.

(c) En déduire que $\forall n \geq 2, 0 \leq R_n \leq \frac{2(n+1)}{n-1} u_{n+1}$.

(d) Donner une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 10^{-3} près.

52.40

Montrer la convergence des séries suivantes, et déterminer n pour que S_n soit une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près.

$$(a) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} \quad \left| \quad (b) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n^2 + 1}.$$

52.41

Soit u une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \sqrt{u_{2n} u_n}$.

52.42

- (a) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
- (b) Utiliser le résultat précédent pour redémontrer le critère de convergence des séries de Riemann.

52.43

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

- (a) Déterminer les variations de $(I_n)_n$.
- (b) Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On pourra pour cela découper l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $[0, \alpha]$ et $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$.
- (c) Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ converge, et calculer sa somme.

52.44

(a) Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

(b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$$

(c) On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$.

52.45

On dit que la série de terme général u_n **enveloppe** le réel A si, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \dots + u_n)| \leq |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle **enveloppe strictement** le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $]0, 1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

- (a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.
- (b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A , alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.
- (c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $A - (u_0 + u_1 + \dots + u_n)$ est du signe de u_{n+1} , alors, elle enveloppe strictement A .
- (d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A .