Intégration des suites de fonctions numériques - convergence dominée

Cours **2**

Exercices **4**

7 Intégration

7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,
- $[a,b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarque.

- *La 3e hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.*
- *La* ***fonction dominante*** *φ est bien-sûr positive (elle majore $|f_n|$) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.*
- *Lorsque I est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.*
- *Il est fréquent que, à t fixé, $(f_n(t))_n$ soit positive et monotone.*
  - *Lorsqu'elle décroît, f_1 peut être choisie comme fonction dominante ;*
  - *Lorsqu'elle croît, la limite f peut être choisie comme fonction dominante.*

Exemple. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque. *On peut connaître la valeur* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

Exemple. Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8 Annexes

8.1 Annexe : démonstration du théorème de convergence dominée dans un cas particulier

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve. On ajoute l'hypothèse que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

- À n fixé, pour tout x, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ où φ est intégrable sur I. Ainsi, les f_n sont intégrables sur I par majoration.
- À x fixé, pour tout n, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, par convergence simple de $(f_n)_n$ vers f, on en déduit que $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$. Ainsi, f est intégrable sur I par majoration.
- On revient à la définition de la limite avec ε.
  Fixons donc $\varepsilon > 0$.
  Par définition de l'intégrale, il existe un segment J inclus dans I tel que :

$$\left|\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_J \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Alors, pour tout n :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_I |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_J |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{I\setminus J} |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_J |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{I\setminus J} |f_n(t)|+|f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_J |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t + 2\int_{I\setminus J} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_J |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \int_J \|f_n-f\|_\infty^J\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \|f_n-f\|_\infty^J d + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

où $d = \mathrm{Max}(J) - \mathrm{Min}(J)$.
Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur J, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty^J \leqslant \frac{\varepsilon}{2d}$.
Il reste, pour $n \geqslant N$:

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

On a montré, en revenant à la définition de la limite, que $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Convergence dominée avec domination par cas

531.30

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt + t^2} \, \mathrm{d}t$$

Se ramener au théorème de convergence dominée

531.31

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

531.32

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, \mathrm{d}x$$

Exercices du CCINP

531.33

CCINP 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

531.34

CCINP 26

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

531.35

CCINP 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercices

531.36

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

531.37

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer la convergence de $(u_n)_n$, et déterminer sa limite.

531.38

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

531.39

Prouver l'existence et déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(x/n)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\mathrm{d}x$

531.40

On pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

531.41

Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

531.42

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x + \ldots + x^n}$.

Petits problèmes d'entrainement

531.43 ✍

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que, pour tout n, I_n existe.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

531.44 ✍

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

(a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

(b) À l'aide de la suite $(f_n)_n$, calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

531.45

On pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^3)^n}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

531.46

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, on considère les f_n ainsi prolongées en 0.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(c) On note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

531.47

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

531.48

On pose $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

(a) Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n), puis la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

(b) Trouver la limite de la suite (u_n).

531.49

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1 + x^2}$$

(a) Montrer que f_n est intégrable sur $]-\infty, 0]$, pour tout n.

On pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.

531.50

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < 1 < b$, et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

(a) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ converge vers $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que :

$$\int_a^b \frac{f(x)x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} f(1)\ln(2)$$