

## Suites de fonctions numériques

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
<b>Cours</b>	<b>3</b>
1 Quelques exemples . . . . .	3
2 Convergence simple . . . . .	3
2.1 Définition . . . . .	3
2.2 Propriétés . . . . .	4
3 Interlude : la norme infinie . . . . .	4
4 Convergence uniforme . . . . .	5
4.1 Propriétés . . . . .	6
4.2 Convergence uniforme sur tout segment . . . . .	6
5 Transfert de continuité par convergence uniforme . . . . .	7
6 Théorème de la double limite . . . . .	7
7 Intégration . . . . .	8
7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme . . . . .	8
7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée . . . . .	9
8 Dérivation . . . . .	9
8.1 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	9
8.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	10
9 Théorèmes d'approximation uniforme . . . . .	11
9.1 Approximation par des fonctions en escalier . . . . .	11
9.2 Approximation par des fonctions polynomiales . . . . .	11
<b>Exercices</b>	<b>12</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	12
Étude et utilisation de la convergence uniforme . . . . .	12
Utiliser le non transfert de continuité pour montrer la non convergence uniforme . . . . .	12
Utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass . . . . .	12
Exercices du CCINP . . . . .	13
Exercices . . . . .	14
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	14

**Je me souviens**

1. Que signifie «  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  » ?
2. Que signifie «  $g$  est en escalier sur  $[a, b]$  » ?
3. Selon les valeurs de  $x$  réel, que peut-on dire de la suite  $\left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)_n$  ?
4. Y a-t-il une différence entre

$$\forall x \in [0, 1[, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, |x^n| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall x \in [0, 1[, \forall n \geq n_0, |x^n| \leq \varepsilon ?$$

5. Que vaut  $\lim_{x \nearrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^n) \right)$  ? et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \nearrow 1} (x^n) \right)$  ?

## 1 Quelques exemples

**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

1. Représenter quelques fonctions  $f_n$ .
2. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite?
3. Continuité?

**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto n^2 x(1-x^2)^n \end{aligned}$$

1. Représenter quelques fonctions  $f_n$ .
2. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite?
3. Intégrale sur  $[0, 1]$ ?

**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

1. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite?
2. Dérivées?

**Remarque.** La convergence « point à point » des suites de fonctions ne permet pas le passage à la limite dans la continuité, le calcul d'intégrales, la dérivation.

## 2 Convergence simple

### 2.1 Définition

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge simplement sur**  $I$  vers  $f$  si et seulement si, pour tout  $x \in I$  **fixé**, la suite numérique  $(f_n(x))_n$  converge vers  $f(x)$ . La fonction  $f$  s'appelle alors la **limite simple** de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .

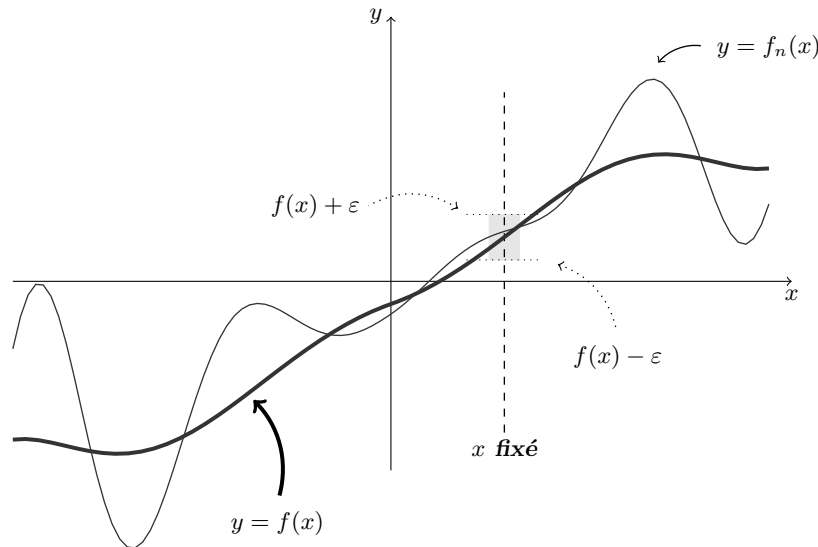
**Remarque.**

- $(f_n)_n$  **converge simplement sur**  $I$  si et seulement s'il existe  $f$  telle que  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ .
- Étudier la convergence simple de  $(f_n)_n$ , c'est étudier la convergence de la suite  $(f_n(x))_n$  à  $x$  fixé.
- On trouve parfois la notation  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$ .
- On peut quantifier la proposition «  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  » :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice  $N$  à partir duquel  $f_n(x)$  approche  $f(x)$  à  $\varepsilon$  près dépend de  $x$ .

**Interprétation graphique.**



**Exemple.** Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par :

1.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$
2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$
3.  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

**2.2 Propriétés**

**Proposition.** Si  $B \subset I$  et si la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f|_B$  sur  $B$ .

**Proposition.** Si les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers  $f$  et  $g$  sur  $I$  et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors la suite de fonctions  $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$ .

**3 Interlude : la norme infinie**

L'étude plus systématique des normes sera faite dans un chapitre dédié. On peut déjà donner la définition, où  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

**Définition.** On appelle **norme** sur  $E$  une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$  *positivité*
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  *homogénéité*
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  *inégalité triangulaire*
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$  *séparation*

Pour  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$  des fonctions  $A \rightarrow \mathbb{K}$  bornées est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en définissant :

**Définition.** Pour  $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ , on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

**Proposition.**  $\| \cdot \|_\infty$  est une norme.

*Preuve.*

□

**Remarque.** Il importe de savoir rédiger l'inégalité triangulaire.

**Corollaire.**  $\| \cdot \|_\infty$  est aussi une norme sur l'espace  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions continues sur le segment  $[a, b]$ .

*Preuve.* Par le théorème des bornes atteintes (fonctions continues sur un segment),  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ .

□

## 4 Convergence uniforme

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge uniformément sur  $I$**  vers  $f$  si et seulement si la suite numérique  $(\|f_n - f\|_\infty)_n$  converge vers 0. La fonction  $f$  est alors appelée **limite uniforme** de  $(f_n)_n$ .

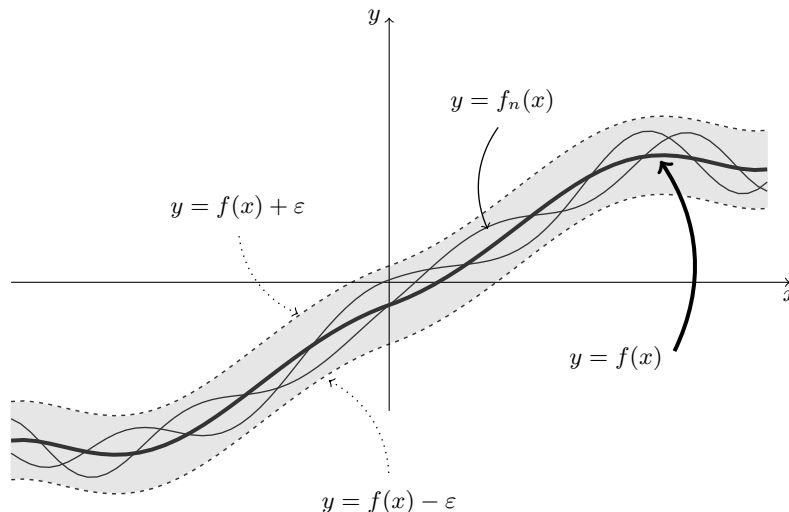
**Remarque.**

- Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, au moins à partir d'un certain rang, la fonction  $f - f_n$  soit bornée sur  $I$ .
- On trouve parfois la notation  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CU}} f$ .
- On peut quantifier la proposition «  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  » :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice  $N$  à partir duquel  $f_n(x)$  approche  $f(x)$  à  $\varepsilon$  près est indépendant de  $x$ . C'est le même pour tout  $x$ , on dit qu'il est *uniforme*, ce qui donne son nom à ce mode de convergence de la suite de fonctions.

**Interprétation graphique.**



**Théorème.**

La convergence uniforme implique la convergence simple.

**Remarque.**

- La réciproque est fausse.
- Si une suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément, sa limite uniforme coïncide avec sa limite simple.

**Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.**

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ . Une représentation graphique peut aider.
- On cherche à majorer  $|f_n(x) - f(x)|$  **indépendamment** de  $x$  par une suite qui converge vers 0.
- La recherche précise de  $\|f_n - f\|_\infty$  peut se faire par l'étude des variations de  $|f_n - f|$ .

**Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.**

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ . Une représentation graphique peut aider.
- S'il n'existe pas de rang à partir duquel  $f_n - f$  est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- On peut montrer le non-transfert à la limite d'une propriété (voir § 5 et § 7).
- On exhibe une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $I$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$  ne converge pas vers 0.

**Exemple.** Étudier la convergence uniforme des trois suites de fonctions :

1.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$
2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$
3.  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

**4.1 Propriétés**

**Proposition.** Si  $B \subset I$  et si la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $B$ .

**Proposition.** Si les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  sur  $I$  et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors la suite de fonctions  $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$ .

**4.2 Convergence uniforme sur tout segment**

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonctions  $I : \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que  $(f_n)_n$  **converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$**  si et seulement si pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f|_{[a, b]}$  sur  $[a, b]$ .

**Exemple.** Étudier la convergence uniforme sur tout segment des trois suites de fonctions :

1.  $f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$
2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$
3.  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

**Remarque.** La convergence uniforme sur tout segment de  $I$  n'est pas équivalente à la convergence uniforme sur  $I$ . C'est une notion plus faible, mais on verra qu'elle pourra suffire à transmettre à la limite certaines propriétés.

**Exemple.**

1. Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégral pour montrer :  $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$  pour tout  $t \geq 0$ .
2. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

## 5 Transfert de continuité par convergence uniforme

### Théorème.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ,
- $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ ,

alors :

- $f$  est continue sur  $I$ .

### Remarque.

- La convergence simple ne suffit pas pour justifier la continuité de  $f$ , comme le montre l'exemple des fonctions  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ .
- La continuité des  $f_n$  et de  $f$  ne suffit pas à justifier la convergence uniforme, comme le montre l'exemple des fonctions  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^2 x(1 - x^2)^n$ .

**Corollaire.** Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ , que les  $f_n$  sont continues sur  $I$  mais que  $f$  n'est pas continue sur  $I$ , alors la convergence n'est pas uniforme sur  $I$ .

**Raisonnement classique.** Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ , que les  $f_n$  sont continues sur  $I$  et qu'il y a convergence uniforme sur tout segment  $[a, b]$  de  $I$ , alors  $f$  est continue sur tout  $[a, b] \subset I$  donc sur  $I$ .

**Remarque.** Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.

## 6 Théorème de la double limite

### Théorème de la double limite.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$  et  $a$  un point de  $I$  ou une extrémité éventuellement infinie de  $I$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n(x)$  admet une limite finie  $\ell_n$  lorsque  $x \rightarrow a$ ,
- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ ,

alors :

- la suite  $(\ell_n)_n$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ ,
- $f(x)$  admet une limite lorsque  $x \rightarrow a$ ,
- cette limite est égale à  $\ell$ .

*Preuve.* La démonstration est hors programme. □

**Remarque.** On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

**Exemple.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_n$  définie par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

1. Déterminer la limite de  $f_n$  en 0.
2. Étudier la convergence simple de  $(f_n)_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)_n$  sur tout  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ .

## 7 Intégration

### 7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

**Lemme.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $K \subset I$ ,
- les  $f_n$  sont continues.

alors, en notant  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  et  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,

- $(F_n)_n$  converge uniformément vers  $F$  sur tout segment de  $I$ .

*Preuve.*

□

**Remarque.** Ainsi, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation, à condition de prendre les primitives qui s'annulent toutes en un même point  $a$  donné.

#### **Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ ,
- $[a, b]$  est un segment,
- les  $f_n$  sont continues.

alors :

- la suite  $\left( \int_a^b f_n(t) dt \right)_n$  converge,
- $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

**Remarque.** On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.



**Remarque.** Le théorème de convergence dominée étudié au § 7.2 fournit un autre critère pour intégrer la limite d'une suite de fonctions, y compris lorsque l'intégrale est généralisée.

**Exemple.** Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{n \sin\left(\frac{t^2}{n}\right) + 1}$$

On donne l'encadrement  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ .

## 7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

**Remarque.** On verra plus tard le théorème suivant, après avoir défini l'intégration sur un intervalle quelconque.

**Théorème de convergence dominée.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  ;
- $(f_n)_n$  satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe  $\varphi$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

où  $\varphi$  indépendante de  $n$  et **intégrable** sur  $I$  ;

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux sur  $I$ .

alors :

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$ ,
- la suite  $\left(\int_I f_n(t) dt\right)_n$  converge,
- $\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$ .

## 8 Dérivation

### 8.1 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

**Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$  intervalle.

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- $(f_n)_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ ,
- la suite des fonctions dérivées  $(f'_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g$ ,

alors :

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- $f' = g$ .

**Remarque.**

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de  $(f_n)_n$  n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  de  $(f_n)_n$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

**Exemple.** Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

## 8.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

**Théorème.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définie sur  $I$  intervalle, et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ,
- pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $(f_n^{(j)})_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $g_j$ ,
- la suite  $(f_n^{(k)})_n$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g_k$ ,

alors :

- la limite simple  $g_0$  de  $(f_n)_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$
- pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $g_0^{(j)} = g_j$ .

**Remarque.**

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d^k}{dx^k} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  des  $(f_n^{(k)})_n$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que  $g_0$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on montre la convergence simple de  $(f_n)_n$  et la convergence uniforme de toutes les  $(f_n^{(j)})_n$ , pour  $j \geq 1$ .

## 9 Théorèmes d'approximation uniforme

### 9.1 Approximation par des fonctions en escalier

---

#### Théorème.

Toute fonction continue (par morceaux) sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

### 9.2 Approximation par des fonctions polynomiales

---

#### Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

**Remarque.** On parle ici de fonctions numériques (à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). L'hypothèse de continuité est importante, celle de segment aussi.

**Exercices et résultats classiques à connaître****Étude et utilisation de la convergence uniforme****53.1**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = x(1 + e^{-nx})$$

- (a) Sur quelle partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement ?
- (b) La convergence est-elle uniforme sur  $D$  ?
- (c) Déterminer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\int_0^1 f_n(t) dt$ .

**Utiliser le non transfert de continuité pour montrer la non convergence uniforme****53.2**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

- (a) Représenter quelques fonctions  $f_n$ .
- (b) Étudier la convergence simple et uniforme de  $(f_n)_n$  sur  $[0, 1]$ .

**Utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass****53.3**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$

Montrer que  $f$  est la fonction nulle.

## Exercices du CCINP

53.4

 9

1. Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ .  
Donner la définition de la convergence uniforme sur  $X$  de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .

2. On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{nx})$ .

- (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .  
(b) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$ ?  
(c) Soit  $a > 0$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$ ?  
(d) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$ ?

53.5

 10

On pose  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$ .

53.6

 11

1. Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .  
On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ .

- (a) Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .  
(b) Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $]0, +\infty[$ .

53.7

 12

1. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x_0$ , avec  $x_0 \in [a, b]$ .

Démontrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$ .

La suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$ ?

53.8

 48

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ .

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2. Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f$ .

(a) Montrer que la suite de fonctions  $(P_n f)$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .

(b) Démontrer que  $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .

(c) Calculer  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .

3. En déduire que  $f$  est la fonction nulle sur le segment  $[0, 1]$ .

## Exercices

**53.9**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$$

- (a) Étudier la convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b]$ .

**53.10**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .
- (b) La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$ ?

**53.11**

Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

**53.12**

Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(nx)e^{-nx^2}$$

**53.13**

Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$$

**53.14**

On pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}$  pour  $x \geq 0$ . Donner l'allure du graphe de  $f_n$ . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$ .

**53.15**

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ , étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_n$  où :

$$f_n : x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$$

## Petits problèmes d'entraînement

**53.16**

Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par :  $\forall n \geq 1$ ,

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

- (a) Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (b) Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**53.17**

On s'intéresse à l'équation fonctionnelle :

$$f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2 \quad (E)$$

- (a) Quelles sont les solutions constantes sur  $\mathbb{R}$ ?

- (b) Pour  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose, pour tout  $x$ ,  $f(x) = xh(x)$ . À quelle condition sur  $h$  la fonction  $f$  est-elle solution de (E) ?

On définit par récurrence une suite de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  en posant :

$$h_0 : x \mapsto 1$$

et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Pour  $x \in [0, 1]$ , on définit  $T_x : y \mapsto y - \frac{xy^2}{2}$ .

- (c) Montrer que  $T_x$  est 1-lipschitzienne sur  $[0, 1]$ , et que  $[0, 1]$  est stable par  $T_x$ .
- (d) Montrer que  $(h_n)_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .
- (e) Montrer que (E) admet une solution continue, non constante, sur  $[0, 1]$ .
- (f) Montrer que (E) admet une solution continue, non constante, sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 53.18

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme sur tout segment pour la suite de fonctions :

- (a)  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (x(1-x))^n$
- (b)  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{nx^3}{1+n^2x}$
- (c)  $f_n : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \text{Min}\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

### 53.19

Soit  $(f_n)_n$  la suite de fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f_0(x) = x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite  $(f_n)_n$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 53.20

Soit  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction positive et bornée. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_n$  définie par :

$$\forall n, \forall x, f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x))$$

### 53.21

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq 0$ , on pose :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- (a) Étudier la convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[0, +\infty[$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq e^x$ .
- (c) Pour  $a > 0$ , montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[0, a]$ .
- (d) La convergence est-elle uniforme sur  $[0, +\infty[$  ?

### 53.22

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , on pose :

$$f_n(x) = \text{Arctan}\left(\frac{n+x}{x}\right)$$

- (a) Étudier la limite simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ .
- (c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout  $]0, a[ \subset ]0, +\infty[$ .

### 53.23

Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $\exp$  ?

### 53.24

On définit  $(u_n)_n$  suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

(a) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) En déduire, pour tout  $x \in [0, 1]$ , la convergence de la suite  $(u_n(x))_n$ .

(c) Établir que la suite  $(u_n)_n$  converge uniformément vers une fonction  $u$  non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

### 53.25

Soit  $a < b$  deux réels et  $(f_n)_n$  une suite de fonctions numériques continues, qui converge uniformément sur  $[a, b]$ . Étudier la suite de terme général :

$$M_n = \max_{x \in [a, b]} f_n(x)$$

### 53.26

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit :

$$f_n : x \mapsto n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 53.27

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies et continues sur  $[a, b]$  segment, qui converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que, pour tout  $x \in [a, b]$  fixé, la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. On veut montrer que la convergence de la suite de fonctions est en fait uniforme sur  $[a, b]$ . On introduit :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)|$$

(a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que :

$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$$

(b) Justifier la convergence de la suite  $(\|f_n\|_\infty)_n$ .

(c) En observant que, pour tout  $p \leq n$ ,  $f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$ , montrer que :

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

### 53.28

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  et  $f_n$  l'itérée d'ordre  $n$  de  $f$  :

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 2x(1-x) \end{array}$$

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ facteurs}}$$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_n$  sur  $[0, 1]$ .

(b) Sur quels segments inclus dans  $[0, 1]$  la convergence est-elle uniforme ?

### 53.29

Soit  $(P_n)_n$  une suite de fonctions polynomiales dont tous les degrés sont majorés par  $d \in \mathbb{N}$ , définies sur  $I$  intervalle. On suppose que  $(P_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .

(a) Montrer que  $f$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $d$ .  
*On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.*

(b) Montrer que  $(P_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment inclus dans  $I$ .

(c) Si  $I$  est un segment, est-ce que cela contredit le théorème d'approximation de Weierstrass ?

(d) On suppose que  $I$  est borné et que la convergence de  $(P_n)_n$  est uniforme sur  $I$ . Montrer qu'il existe  $(c_n)_n$  une suite de réels, de limite nulle, telle que :

$$P_n = f + c_n \text{ pour } n \text{ assez grand}$$



## Suites de fonctions numériques – convergence dominée

<b>Cours</b>	<b>2</b>
7 Intégration . . . . .	2
7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme . . . . .	2
7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée . . . . .	2
8 Annexes . . . . .	3
8.1 Annexe : démonstration du théorème de convergence dominée dans un cas particulier . . .	3
<b>Exercices</b>	<b>4</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	4
Convergence dominée avec domination par cas . . . . .	4
Se ramener au théorème de convergence dominée . . . . .	4
Exercices du CCINP . . . . .	5
Exercices . . . . .	5
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	6

## 7 Intégration

### 7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

#### Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ ,
- $[a, b]$  est un segment,
- les  $f_n$  sont continues.

alors :

- la suite  $\left( \int_a^b f_n(t) dt \right)_n$  converge,
- $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

### 7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

#### Théorème de convergence dominée.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  ;
- $(f_n)_n$  satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe  $\varphi$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

où  $\varphi$  indépendante de  $n$  et **intégrable** sur  $I$  ;

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux sur  $I$ .

alors :

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$ ,
- la suite  $\left( \int_I f_n(t) dt \right)_n$  converge,
- $\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$ .

#### Remarque.

- La 3<sup>e</sup> hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.
- La **fonction dominante**  $\varphi$  est bien-sûr positive (elle majore  $|f_n|$ ) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.
- Lorsque  $I$  est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.
- Il est fréquent que, à  $t$  fixé,  $(f_n(t))_n$  soit positive et monotone.
  - Lorsqu'elle décroît,  $f_1$  peut être choisie comme fonction dominante ;
  - Lorsqu'elle croît, la limite  $f$  peut être choisie comme fonction dominante.

**Exemple.** Déterminer la limite de la suite de terme général  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ .

**Exemple.** Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

**Remarque.** On peut connaître la valeur  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

**Exemple.** Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n(2 - nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 8 Annexes

### 8.1 Annexe : démonstration du théorème de convergence dominée dans un cas particulier

#### Théorème de convergence dominée.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  ;
- $(f_n)_n$  satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe  $\varphi$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

où  $\varphi$  indépendante de  $n$  et **intégrable** sur  $I$  ;

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux sur  $I$ .

alors :

- les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$ ,
- la suite  $\left(\int_I f_n(t) \, dt\right)_n$  converge,
- $\int_I f_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) \, dt$ .

*Preuve.* On ajoute l'hypothèse que la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$ .

- À  $n$  fixé, pour tout  $x$ ,  $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$  où  $\varphi$  est intégrable sur  $I$ . Ainsi, les  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  par majoration.
- À  $x$  fixé, pour tout  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ . Par passage à la limite dans les inégalités larges, par convergence simple

de  $(f_n)_n$  vers  $f$ , on en déduit que  $|f(x)| \leq \varphi(x)$ . Ainsi,  $f$  est intégrable sur  $I$  par majoration.

- On revient à la définition de la limite avec  $\varepsilon$ . Fixons donc  $\varepsilon > 0$ .

Par définition de l'intégrale, il existe un segment  $J$  inclus dans  $I$  tel que :

$$\left| \int_I \varphi(t) \, dt - \int_J \varphi(t) \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Alors, pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} & \left| \int_I f(t) \, dt - \int_I f_n(t) \, dt \right| \\ & \leq \int_I |f_n(t) - f(t)| \, dt \\ & = \int_J |f_n(t) - f(t)| \, dt + \int_{I \setminus J} |f_n(t) - f(t)| \, dt \\ & \leq \int_J |f_n(t) - f(t)| \, dt + \int_{I \setminus J} |f_n(t)| + |f(t)| \, dt \\ & \leq \int_J |f_n(t) - f(t)| \, dt + 2 \int_{I \setminus J} |\varphi(t)| \, dt \\ & \leq \int_J |f_n(t) - f(t)| \, dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq \int_J \|f_n - f\|_\infty^J \, dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq \|f_n - f\|_\infty^J d + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

où  $d = \text{Max}(J) - \text{Min}(J)$ .

Comme  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $J$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\|f_n - f\|_\infty^J \leq \frac{\varepsilon}{2d}$ . Il reste, pour  $n \geq N$  :

$$\left| \int_I f(t) \, dt - \int_I f_n(t) \, dt \right| \leq \varepsilon$$

On a montré, en revenant à la définition de la limite, que  $\int_I f_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) \, dt$ .

□

**Exercices et résultats classiques à connaître****Convergence dominée avec domination par cas****53.30**

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt + t^2} dt$$

**Se ramener au théorème de convergence dominée****53.31**Déterminer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

**53.32**

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$$

## Exercices du CCINP

53.33

 25

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

53.34

 26

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

- Justifier que  $I_n$  est bien définie.
- Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente ?

53.35

 27

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
- Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?
- La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?
- Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## Exercices

53.36

Déterminer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

53.37

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)} dx$$

- Montrer l'existence de  $u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Montrer la convergence de  $(u_n)_n$ , et déterminer sa limite.

53.38

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Étudier la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :

$$\int_0^1 f(t^n) dt$$

53.39

Prouver l'existence et déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{|l} \text{(a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx \\ \text{(b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2} dx \\ \text{(d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx \end{array} \right.$$

53.40

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$ .

## Petits problèmes d'entraînement

**53.41**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} dx$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $I_n$  existe.  
 (b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

**53.42**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$  vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x}$ .  
 (b) À l'aide de la suite  $(f_n)_n$ , calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

**53.43**

On pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**53.44**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$$

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, on considère les  $f_n$  ainsi prolongées en 0.

- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .  
 (c) On note  $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ . Montrer que  $(u_n)_n$  converge et déterminer sa limite.

**53.45**

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n t dt$$

**53.46**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on note :

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2}$$

- (a) Montrer que  $f_n$  est intégrable sur  $]-\infty, 0]$ , pour tout  $n$ .

On pose  $I_n = \int_{-\infty}^0 f_n(x) dx$ .

- (b) Montrer que  $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  
 (c) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ .

**53.47**

Soit  $a, b$  deux réels tels que  $0 < a < 1 < b$ , et  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ .

- (a) Montrer que la suite de terme général  $\int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n} dx$  converge vers  $\int_a^1 f(x) dx$ .

- (b) Montrer que : 
$$\int_a^b \frac{f(x)x^n}{1+x^n} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} f(1) \ln(2)$$

**53.48**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$$

- (a) Justifier l'existence de  $I_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 (b) Déterminer la limite de  $(I_n)_n$ .  
 (c) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(n+x)} dx$ .  
 (d) Déterminer un équivalent simple de  $I_n$ .

**53.49**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et intégrable. Étudier la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de :

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$$

**53.50**

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \text{ et } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \text{ pour tout } n$$

- (a) Calculer  $\int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ .  
 (b) Déterminer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ .  
 (c) Calculer la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ .  
 (d) Retrouver la formule de Stirling.

**53.51**

On définit, pour  $x$  réel :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- (a) Justifier que  $\Gamma$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .  
 (b) Pour  $s$  réel, justifier que  $\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^s$ .  
 (c) Calculer, à l'aide d'intégrations par parties :

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

- (d) En déduire la formule d'Euler :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

**53.52**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , intégrable sur  $[0, +\infty[$ , à dérivée intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

- (a) Pour  $x > 0$ , déterminer la limite de :

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t \sin^n t f(xt) dt$$

- (b) Préciser le mode de convergence.

**53.53**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$

et on considère  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle en dehors d'un segment  $[a, b]$ .

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(0)$$