

Séries de fonctions numériques

Je me souviens	2
Cours	3
1 Modes de convergence d'une série de fonctions	3
1.1 Convergence simple	3
1.2 Convergence uniforme	3
1.3 Convergence normale	4
1.4 Lien entre les différents modes de convergence	5
2 Régularité de la somme d'une série de fonctions	5
2.1 Transfert de continuité	5
2.2 Théorème de la double limite	5
2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	6
2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$	6
Exercices	7
Exercices et résultats classiques à connaître	7
La fonction ζ de Riemann	7
La fonction η de Dirichlet	7
Faire apparaître une équation différentielle	8
Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition	8
Étudier la dérivabilité au bord de l'ensemble de définition	8
Exercices du CCINP	9
Exercices	10
Petits problèmes d'entraînement	12

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ? Quel est le lien entre suite et série ?
2. Quelles sont les principales techniques d'étude d'une série numérique à termes positifs ? alternées ? de signe quelconque ?
3. Qu'est-ce que la convergence simple d'une suite de fonctions ? la convergence uniforme ?
4. Comment assurer la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions ? et la dérivabilité ?

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{aligned} S : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.

- En cas de convergence simple sur I , on note :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I .

- On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geq n_0$.

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I . Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J , appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 520 : on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'une série numérique connue (Riemann, géométrie, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

$$1. f_n(x) = x^n$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

$$3. f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

$$4. f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

$$5. f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

$$6. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I .

Remarque. On peut quantifier la définition par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}, I = [0, 1].$

3. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}, I = \mathbb{R}.$

2. $f_n(x) = xe^{-nx^2}, I = \mathbb{R}.$

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I , et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I .

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur I .

Remarque. Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au TSSA.

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce paragraphe un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur I** si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geq n_0$.
- Le premier point permet de garantir l'existence de $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)|, x \in I\}$
- Le second point est la convergence d'une série **numérique**.
- La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$.

S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, |f_n(x)| \leq \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente, alors $\sum f_n$ converge normalement.

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est continue sur I ,

alors :

- S est continue sur I .

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I , alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I .

Remarque. Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a ,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a ,
- cette limite est égale à ℓ .

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de $f(x)$.

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $] -1, 1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur I ,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- pour tout x : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f'_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Remarque. Étudier les variations de la somme f d'une série de fonction, c'est d'abord comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$, ce qui peut souvent se faire en comparant les « sommandes », sans faire appel au théorème de classe $\mathcal{C}^1$, lourd à mettre en œuvre.

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2 - n^2}$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geq 1$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercices et résultats classiques à connaître

La fonction ζ de Riemann

540.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

La fonction η de Dirichlet

540.2

On définit, lorsque c'est possible :

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

- Déterminer le domaine de définition D de η .
- Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur D .
- Montrer que η est continue sur D .
- [*] Établir, pour $x > 1$:

$$\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

Faire apparaître une équation différentielle

540.3

- (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

- (b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition

540.4

On considère :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

- (a) Montrer que f est définie sur $] -1, +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.
(c) Déterminer la limite de f en -1 à droite.

Étudier la dérivabilité au bord de l'ensemble de définition

540.5

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

- (a) Montrer que g est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
(b) [*] Est-ce que g est dérivable en 1 ?

Exercices du CCINP

540.6

 8.2

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

- (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

540.7

 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f ,

alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$.

On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Prouver, **en utilisant 1**, que :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

540.8

 15.12

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .

540.9

 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant $S(1)$, démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

540.10

 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A \right)$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

540.11

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
 (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
 (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

540.12

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
 $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?
 (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

**Exercices****540.13**

On définit, lorsque c'est possible :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- (a) Justifier que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.
- (b) En utilisant le théorème de la double limite en 1, montrer que la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- (c) En utilisant une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1$.
- (d) Montrer que ζ a une limite en $+\infty$, et la calculer.

540.14

Étude des différents mode de convergence (simple, normale, uniforme) de $\sum n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

540.15

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

- (a) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$
- (b) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{(-1)^n x}{x^2 + n}$
- (c) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$

540.16

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$.

- (a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.
- (c) La convergence est-elle normale sur $[0, +\infty[$?

540.17

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[0, A] \subset [0, +\infty[$.
- (c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$$

- (d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

540.18

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

- (a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}$
- (b) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto n^2 x^n (1 - x)^n$
- (c) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$

540.19

On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = ne^{-nx}$.

- (a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- (b) Montrer que $\forall a > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
- (c) Pour $x > 0$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

540.20

Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx} + e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

540.21

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- (a) Montrer que f est ainsi correctement définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (c) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

540.22

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f , puis la continuité de f sur ce domaine.
- (b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
- (c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

540.23

Pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine définition.
- (c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

540.24

On considère la série de fonctions de t.g. u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
- (b) Calculer $S'(1)$.

Indication : penser à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Petits problèmes d'entraînement**540.25**

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de ζ .
- (b) Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer $\zeta^{(k)}(x)$ sous la forme de somme d'une série.
- (c) Étudier les variations de ζ .

(d) Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

(e) Montrer, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

En déduire le comportement de $\zeta(x)$ pour $x \xrightarrow{+} 1$.

(f) Dresser le tableau des variations de ζ et tracer sa courbe représentative.

540.26

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$.

- (a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
- (b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$, impaire.
- (c) Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
- (d) Préciser les variations de S .
- (e) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-t_0, t_0[\setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

- (f) Étudier la dérivabilité de S en 0.
- (g) Tracer la courbe représentative de S .

540.27

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ (quand cela a un sens).

Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

En utilisant la décroissance, à $x > 0$ fixé, de $g : t \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$, montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

540.28

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$. Sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- (a) Déterminer le domaine définition de f .
- (b) Montrer que pour tout x non nul de D_f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- (c) Pour tout $a \in [0, 1[$, montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- (d) Montrer que f est continue en 1.

540.29

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f_n : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2} \end{aligned}$$

- (a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$. On note S la somme.
- (b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme de sommes de séries.
- (c) En déduire que S est strictement croissante et concave sur $[0, +\infty[$.
- (d) Montrer, d'une façon plus simple, que S est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

540.30

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive et décroissante. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n x^n (1-x) \end{aligned}$$

- (a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
- (b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
- (c) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

540.31

On rappelle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On souhaite démontrer ici que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$$

- (a) Démontrer le résultat lorsque $z \in \mathbb{R}$, en utilisant la fonction $\ln$.
- (b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, rappeler le développement par le binôme de $\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$.

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on définit, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (c) Étudier la convergence de la série numérique $\sum f_k(p)$, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.
- (d) Établir la convergence normale de $\sum f_k$ sur $\mathbb{R}_+$, et conclure à l'aide du théorème de la double limite.

540.32

On note $\cotan$ la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n}$$

- (a) Montrer que $(S_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et que sa limite, notée S , est impaire et 1-périodique.
- (b) Justifier la continuité de S sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

- (c) On pose $f(x) = \pi \cotan(\pi x) - S(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que f vérifie la même équation fonctionnelle que S , et qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note encore f ce prolongement.
- (d) Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

$$\text{et prouver que } f(a) = f\left(\frac{a}{2}\right).$$

- (e) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$$

- (f) En déduire la valeur de $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

540.33

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$$

et, sous réserve de convergence :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de S .
- (b) Étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $]0, 1[$.
- (c) Étudier la continuité de S sur $]0, 1[$.
- (d) Étudier la limite de S en 0 à droite.

540.34

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée de réels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, on pose :

$$f_n(x) = a_n x^n (1-x)$$

et, sous réserve de convergence :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n (1-x)$$

- (a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, 1[$.
- (b) Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, 1[$.
- (c) Est-ce que S est continue sur $[0, 1[$.
- (d) A-t-on : $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$?

540.35

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2 x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$$

et, en cas de convergence, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de S .
- (b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .