

Séries de fonctions numériques - interversion série / intégrale

Cours	2
1 Intégration	2
1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme	2
1.2 Interversion \sum / \int sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive	2
1.3 Interversion \sum / \int sur un intervalle quelconque	3
1.4 Utilisation de la convergence dominée	3
2 Annexes	4
2.1 Annexe : démonstration du théorème d'interversion série-intégrale	4
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Utiliser l'interversion série/intégrale	5
Utiliser la convergence dominée	5
Exercices	6
Petits problèmes d'entraînement	6

1 Intégration

1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$ converge,

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt$

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) dt = a_m$$

1.2 Interversion \sum / \int sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I ,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$

Remarque.

- En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1.3 Interverson \sum / \int sur un intervalle quelconque

Remarque. Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I ,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| dt \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I ,
- $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.

- L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.
- L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.

Exemple. Montrer que : $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.

1.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

2 Annexes

2.1 Annexe : démonstration du théorème d'interversion série-intégrale

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I ,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| dt \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I ,
- $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$

Preuve. On définit, pour $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t), \quad T_n(t) = \sum_{k=0}^n |f_k(t)|$$

et

$$\varphi_n(t) = \text{Min}(T_n(t), |S(t)|)$$

On sait que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CS}} S$ sur I , et $0 \leq \varphi_n(t) \leq |S(t)|$.

- *Convergence simple de $(\varphi_n)_n$.*
Soit $t \in I$ fixé.

- 1^{er} cas : si $(T_n(t))_n$ converge, on note $T(t)$ sa limite. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |S(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(t)| \\ &= T(t) \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_n(t) = \text{Min}(T_n(t), |S(t)|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \text{Min}(T(t), |S(t)|) = |S(t)|$$

par les propriétés du Min, en utilisant par exemple que $\text{Min}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|)$.

- 2^e cas : si $(T_n(t))_n$ diverge, elle tend vers $+\infty$ comme somme partielle d'une série positive. Par définition appliquée avec $|S(t)|$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $T_n(t) \geq |S(t)|$ et donc, pour $n \geq N$:

$$\varphi_n(t) = |S(t)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |S(t)|$$

On a donc montré que :

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CS}} |S|$$

- *Intégrabilité de S sur I .*

On traite le cas où $I = [a, +\infty[$, les autres cas étant analogues.

Travaillons d'abord sur $[a, x] \subset [a, +\infty[$. Comme S est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, elle est intégrable sur $[a, x]$. C'est bien-sûr une fonction dominante, et on a montré que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CS}} |S|$ donc, par convergence dominée :

$$\int_a^x \varphi_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^x |S(t)| dt$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi_n(t) dt &\leq \int_a^x T_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^x |f_k(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^n \int_a^{+\infty} |f_k(t)| dt \\ &\quad \text{car } f_k \text{ intégrable sur } [a, +\infty[\\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f_k(t)| dt \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette égalité, on a donc :

$$\int_a^x |S(t)| dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f_k(t)| dt$$

Donc l'intégrale partielle $x \mapsto \int_a^x |S(t)| dt$, croissante puisque l'intégrande est positif, est majorée, donc admet une limite finie pour $x \rightarrow +\infty$. On a donc montré :

$$S \text{ est intégrable et } \int_a^{+\infty} |S(t)| dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f_k(t)| dt$$

- *Montrons maintenant l'égalité $\sum \int = \int \sum$.*

On note $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$, qui est intégrable sur I car S_n et S le sont donc $R_n = S - S_n$ aussi. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_I R_n(t) dt \right| &\leq \int_I |R_n(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \int_I |f_k(t)| dt \end{aligned}$$

par le point précédent, adapté à R_n à la place de S

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

comme reste d'une série conv.

$$\begin{aligned} \int_I S(t) dt &= \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt \\ &= \int_I \sum_{k=0}^n f_k(t) dt + \int_I R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_I f_k(t) dt + \underbrace{\int_I R_n(t) dt}_{n \rightarrow +\infty \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t) dt \end{aligned}$$

Et donc :

$$\int_I S(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t) dt$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Utiliser l'interversion série/intégrale

541.1

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

Utiliser la convergence dominée

541.2

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

Exercices**541.3**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.4

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.5

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

Petits problèmes d'entraînement**541.6** ↗

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

541.7 ↗Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1} dx$$

(a) Justifier l'existence de J_n .(b) Calculer $J_n - J_{n+1}$.

(c) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.8Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n+1} \cos^n(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

(a) Déterminer les limites, pour $n \rightarrow +\infty$, de I_n et J_n .(b) Montrer que $\sum (-1)^n I_n$ est convergente.(c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$.**541.9**

On note, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt{1+nx}}$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .(b) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et que

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}$$

(c) f est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?**541.10**Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x})$$

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+ .

(b) Calculer, pour $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(c) Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.

(d) Soit (R_n) la suite de fonctions des restes. Montrer que :

$$\int_0^1 R_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(e) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.

(f) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

541.11

Montrer que $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1-x^2} dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

541.12

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$