Séries de fonctions numériques - interversion série / intégrale

Cours 2

1 Intégration . . . 2
 1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme . . . 2
 1.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive . . . 2
 1.3 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque . . . 3
 1.4 Utilisation de la convergence dominée . . . 3
2 Annexes . . . 4
 2.1 Annexe : démonstration du théorème d'interversion série-intégrale . . . 4

Exercices 5

Exercices et résultats classiques à connaître . . . 5
 Utiliser l'interversion série/intégrale . . . 5
 Utiliser la convergence dominée . . . 5
Exercices . . . 6
Petits problèmes d'entrainement . . . 6

1 Intégration

1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b S(t) \, \mathrm{d}t$

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) \, \mathrm{d}t = a_m$$

1.2 Interversion $\sum$ / $\int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\displaystyle\int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, l'intégrabilité de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sur* I *équivaut à* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t < +\infty$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1.3 Interversion $\sum$ / $\int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \,\mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.
- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.

1.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

2 Annexes

2.1 Annexe : démonstration du théorème d'interversion série-intégrale

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum\left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve. On définit, pour $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t),\ T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(t)|$$

et

$$\varphi_n(t) = \mathrm{Min}(T_n(t), |S(t)|)$$

On sait que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} S$ sur I, et $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant |S(t)|$.

- *Convergence simple de $(\varphi_n)_n$.*
  Soit $t \in I$ fixé.
  - 1^er cas : si $(T_n(t))_n$ converge, on note $T(t)$ sa limite. Par l'inégalité triangulaire,
  $$\begin{aligned}|S(t)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(t)| \\ &= T(t)\end{aligned}$$
  donc
  $$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \mathrm{Min}(T_n(t), |S(t)|) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Min}(T(t), |S(t)|) = |S(t)|\end{aligned}$$
  par les propriété du Min, en utilisant par exemple que $\mathrm{Min}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-|\alpha-\beta|)$.
  - 2^e cas : si $(T_n(t))_n$ diverge, elle tend vers $+\infty$ comme somme partielle d'une série positive. Par définition appliquée avec $|S(t)|$, il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $T_n(t) \geqslant |S(t)|$ et donc, pour $n \geqslant N$:
  $$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= |S(t)| \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} |S(t)|\end{aligned}$$

  On a donc montré que :
  $$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} |S|$$

- *Intégrabilité de S sur I.*
  On traite le cas où $I = [a, +\infty[$, les autres cas étant analogues.
  Travaillons d'abord sur $[a, x] \subset [a, +\infty[$. Comme S est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, elle est intégrable sur $[a, x]$. C'est bien-sûr une fonction dominante, et on a montré que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} |S|$ donc, par convergence dominée :
  $$\int_a^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^x |S(t)|\,\mathrm{d}t$$
  D'autre part :
  $$\begin{aligned}\int_a^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_a^x T_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_a^x |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\int_a^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \text{car } f_k \text{ intégrable sur } [a,+\infty[\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
  En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on a donc :
  $$\int_a^x |S(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$$
  Donc l'intégrale partielle $x \mapsto \int_a^x |S(t)|\,\mathrm{d}t$, croissante puisque l'intégrande est positif, est majorée, donc admet une limite finie pour $x \to +\infty$. On a donc montré :
  $$S \text{ est intégrable et } \int_a^{+\infty} |S(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$$

- *Montrons maintenant l'égalité $\sum\int = \int\sum$.*
  On note $R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$, qui est intégrable sur I car S_n et S le sont dont $R_n = S - S_n$ aussi. On a :
  $$\begin{aligned}\left|\int_I R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_I |R_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\int_I |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \text{par le point précédent, adapté à } R_n \text{ à la place de } S \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ &\qquad \text{comme reste d'une série conv.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_I S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_I R_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_I R_n(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Utiliser l'interversion série/intégrale

541.1

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Utiliser la convergence dominée

541.2

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercices

541.3

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.4

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = -\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.5

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

Petits problèmes d'entrainement

541.6 ✍

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

541.7 ✍

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}\,dx$$

(a) Justifier l'existence de J_n.

(b) Calculer $J_n - J_{n+1}$.

(c) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

541.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n+1}\cos^n(x)}{1+\cos(x)}\,dx$$

(a) Déterminer les limites, pour $n \to +\infty$, de I_n et J_n.

(b) Montrer que $\sum(-1)^n I_n$ est convergente.

(c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n$.

541.9

On note, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$

(c) f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

541.10

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x})$$

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Calculer, pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(c) Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

(d) Soit (R_n) la suite de fonctions des restes. Montrer que :

$$\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(e) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

(f) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

541.11

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

541.12

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

541.13

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, on définit :

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{-nt} - 2\mathrm{e}^{-2nt}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

existent, mais que leurs valeurs ne sont pas égales.

541.14

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

541.15

Soit $(a_n)_n$ une suite croissante, de limite $+\infty$ de réels strictement posifs. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$$

541.16

Soit n un entier naturel non nul.

(a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est définie.

(b) Soit $a \geqslant 0$. Calculer : $\displaystyle\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ puis de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[0,a]$, puis que :

$$\int_0^a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

(d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite lorsque $a \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

(e) En déduire que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

(f) Qu'en conclure ?