Séries de fonctions numériques

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ? Quel est le lien entre suite et série ?
2. Quelles sont les principales techniques d'étude d'une série numérique à termes positifs ? alternées ? de signe quelconque ?
3. Qu'est-ce que la convergence simple d'une suite de fonctions ? la convergence uniforme ?
4. Comment assurer la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions ? et la dérivabilité ?

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Dans ce chapitre, on considère des applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$.

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{array}{rccl} S : & I & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- *La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :*
$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.
- *En cas de convergence simple sur I, on note :*
$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$
Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I.
- *On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geqslant n_0$.*

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I. Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J, appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. *L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 52 : on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'unes série numérique connue (Riemann, géométrique, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.*

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

1. $f_n(x) = x^n$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$
3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$
4. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$
5. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$
6. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Remarque. *On peut quantifier la définition par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ t.q. \ \forall n \geqslant N, \ \forall x \in I, \ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $I = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I.

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur I.

Remarque. *Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au TSSA.*

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce paragraphe un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur I** si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- *On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geqslant n_0$.*
- *Le premier point permet de garantir l'existence de $\|f_n\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f_n(x)|, \ x \in I\}$*
- *Le second point est la convergence d'une série **numérique**.*
- *La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.*

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$.
S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, \ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente,
alors $\sum f_n$ converge normalement.

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$.

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n est continue sur I,

alors :

- S est continue sur I.

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I, alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I.

Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que exp est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n admet une limite finie ℓ_n en a,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a,
- cette limite est égale à ℓ.

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \to +\infty$ de $f(x)$.

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $]-1,1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur I,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- pour tout x : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- *La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f_n'$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Remarque. *Étudier les variations de la somme f d'une série de fonction, c'est d'abord comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$, ce qui peut souvent se faire en comparant les « sommandes », sans faire appel au théorème de classe $\mathcal{C}^1$, lourd à mettre en œuvre.*

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2 - n^2}$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$
Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*
- *Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geqslant 1$.*

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Intégration et séries de fonctions

3.1 Primitivation, intégration terme à terme sur un segment et convergence uniforme

Lemme. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$. Pour tout n, on note F_n la primitive de f_n qui s'annule en a.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$ (on note S sa somme),

alors :

- la série $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$ est la primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ qui s'annule en a.

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.

Exemple. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x$.

3.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, l'intégrabilité de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sur* I *équivaut à* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

3.3 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *On verra plus tard le théorème suivant, après avoir défini l'intégration sur un intervalle quelconque.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\displaystyle\sum \left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Exercices et résultats classiques à connaître

La fonction ζ de Riemann

54.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Faire apparaître une équation différentielle

54.2

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition

54.3

On considère :

$$f \; : \; x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(a) Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.

(c) Déterminer la limite de f en -1 à droite.

Étudier la dérivabilité au bord de l'ensemble de définition

54.4

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(a) Montrer que g est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

(b) Est-ce que g est dérivable en 1 ?

Exercices du CCINP

54.5 — 8.2

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

54.6 — 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n\,(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

54.7 — 15.12

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

54.8 — 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \quad u_n\,(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

54.9 — 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\big(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\big)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

54.10 — 18

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?

(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

54.11 INP 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercices

54.12

On définit, lorsque c'est possible :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

(a) Justifier que le domaine de définition de ζ est $]1,+\infty[$.

(b) En utilisant le théorème de la double limite en 1, montrer que la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

(c) En utilisant une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \to 1$.

(d) Montrer que ζ a une limite en $+\infty$, et la calculer.

54.13

Étude des différents mode de convergence (simple, normale, uniforme) de $\sum nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

54.14

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

(a) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n} \end{array}$

(b) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n x}{x^2+n} \end{array}$

(c) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+n^3x^2} \end{array}$

54.15

Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

(a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,+\infty[$.

(c) La convergence est-elle normale sur $[0,+\infty[$?

54.16

Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[0, A] \subset [0, +\infty[$.

(c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5}$$

(d) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

54.17

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

(a) $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \end{array}$

(b) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2 x^n (1-x)^n \end{array}$

(c) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{n^3+x^2} \end{array}$

54.18

On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

(b) Montrer que $\forall a > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(c) Pour $x > 0$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

54.19

Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

54.20

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

(a) Montrer que f est ainsi correctement définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

54.21

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.

(b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

(c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

54.22

Pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine définition.

(c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

54.23

On considère la série de fonctions de t.g. u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

(b) Calculer $S'(1)$.

Indication : penser à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Petits problèmes d'entrainement

54.24

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de ζ.

(b) Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer $\zeta^{(k)}(x)$ sous la forme de somme d'une série.

(c) Étudier les variations de ζ.

(d) Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

(e) Montrer, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

En déduire le comportement de $\zeta(x)$ pour $x \overset{>}{\to} 1$.

(f) Dresser le tableau des variations de ζ et tracer sa courbe représentative.

54.25

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = \frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{n^2}$.

(a) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

(b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$, impaire.

(c) Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

(d) Préciser les variations de S.

(e) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-t_0, t_0[\setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

(f) Étudier la dérivabilité de S en 0.

(g) Tracer la courbe représentative de S.

54.26

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ (quand cela a un sens).
Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
En utilisant la décroissance, à $x > 0$ fixé, de $g \,:\, t \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$, montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

54.27

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$. Sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Déterminer le domaine définition de f.

(b) Montrer que pour tout x non nul de D_f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(c) Pour tout $a \in [0,1[$, montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(d) Montrer que f est continue en 1.

54.28

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(n+x)}{n^2} \end{array}$$

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$. On note S la somme.

(b) Monter que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et exprimer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme de sommes de séries.

(c) En déduire que S est strictement croissante et concave sur $[0,+\infty[$.

(d) Montrer, d'une façon plus simple, que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

54.29

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive et décroissante. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n x^n (1-x) \end{array}$$

(a) Monter que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

(c) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

54.30

On rappelle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On souhaite démontrer ici que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \lim_{p\to+\infty} \left(1+\frac{z}{p}\right)^p$$

(a) Démontrer le résultat lorsque $z \in \mathbb{R}$, en utilisant la fonction ln.

(b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, rappeler le développement par le binôme de $\left(1+\dfrac{z}{p}\right)^p$.

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on définit, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} & \text{si } x \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Étudier la convergence de la série numérique $\sum f_k(p)$, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(d) Établir la convergence normale de $\sum f_k$ sur $\mathbb{R}_+$, et conclure à l'aide du théorème de la double limite.

54.31

On note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

(a) Montrer que $(S_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et que sa limite, notée S, est impaire et 1-périodique.

(b) Justifier la continuité de S sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

(c) On pose $f(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - S(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que f vérifie la même équation fonctionnelle que S, et qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note encore f ce prolongement.

(d) Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que :

$$f(a) = \operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

et prouver que $f(a) = f\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

(e) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$$

(f) En déduire la valeur de $\zeta(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

54.32

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$$

et, sous réserve de convergence :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $]0,1]$.

(c) Étudier la continuite de S sur $]0,1]$.

(d) Étudier la limite de S en 0 à droite.

54.33

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée de réels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on pose :

$$f_n(x) = a_n x^n (1-x)$$

et, sous réserve de convergence :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n (1-x)$$

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1[$.

(b) Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1[$.

(c) Est-ce que S est continue sur $[0,1[$.

(d) A-t-on : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x)$?

54.34

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$$

et, en cas de convergence, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Séries de fonctions numériques – interversion série/intégrale

3 Intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\,\mathrm{d}t = a_m$$

3.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, l'intégrabilité de* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sur* I *équivaut à* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3.3 Interversion $\sum$ / $\int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \,\mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.
- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exemple. Utiliser le théorème précédent pour exprimer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ comme somme d'une série.

3.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Exercices et résultats classiques à connaître

Utiliser l'interversion série/intégrale

54.35

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Utiliser la convergence dominée

54.36

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercices

54.37

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

54.38

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

54.39

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

Petits problèmes d'entrainement

54.40 ✍

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

54.41 ✍

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

(a) Justifier l'existence de J_n.

(b) Calculer $J_n - J_{n+1}$.

(c) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

54.42

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n+1}\cos^n(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Déterminer les limites, pour $n \to +\infty$, de I_n et J_n.

(b) Montrer que $\sum (-1)^n I_n$ est convergente.

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n$.

54.43

On note, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$

(c) f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

54.44

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

54.45

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, on définit :

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{-nt} - 2\mathrm{e}^{-2nt}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

existent, mais que leurs valeurs ne sont pas égales.

54.46

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

54.47

Soit $(a_n)_n$ une suite croissante, de limite $+\infty$ de réels strictement posifs. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

54.48

Soit n un entier naturel non nul.

(a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est définie.

(b) Soit $a \geqslant 0$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{a} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ puis de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[0, a]$, puis que :

$$\int_0^{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

(d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite lorsque $a \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

(e) En déduire que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

(f) Qu'en conclure ?