Séries entières

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série de fonctions ? Différents modes de convergence ?
2. Lien entre suite convergente et suite bornée ?
3. Lien entre $\sum u_n$ convergente et (u_n) bornée ?
4. Qu'est-ce que la convergence absolue d'une série numérique ?
   Lien entre convergence absolue et convergence ?
5. Qu'est-ce qu'un produit de Cauchy ?
6. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$? Pour quels x ?
7. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Pour quels x ?
8. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$? Pour quels x ?
9. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n/2}}$?
10. Qu'est-ce que la règle de D'Alembert ?
11. Condition nécessaire (ou suffisante ?) pour que la somme S d'une série de fonctions soit continue sur I ?
    Idem pour dériver S ?
12. Formule de Taylor avec reste intégral ?
13. Développements limités en 0 des fonctions usuelles (exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, Arctan).

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n \;:\; x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*
Lorsque $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.
Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

> Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
> Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \mathrm{Sup}\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est infini (resp. nul, resp. égal à 1).

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

- Si $|z| < R$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

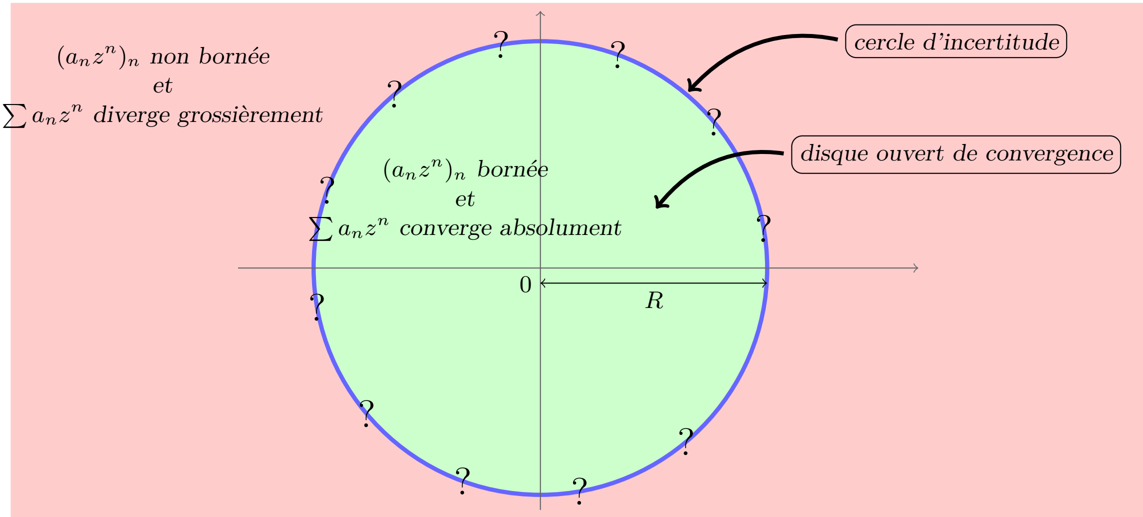
Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0,R)$ la **somme** de la série entière : $S \;:\; \begin{array}{rcl} D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$

Le cercle $C(0,R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



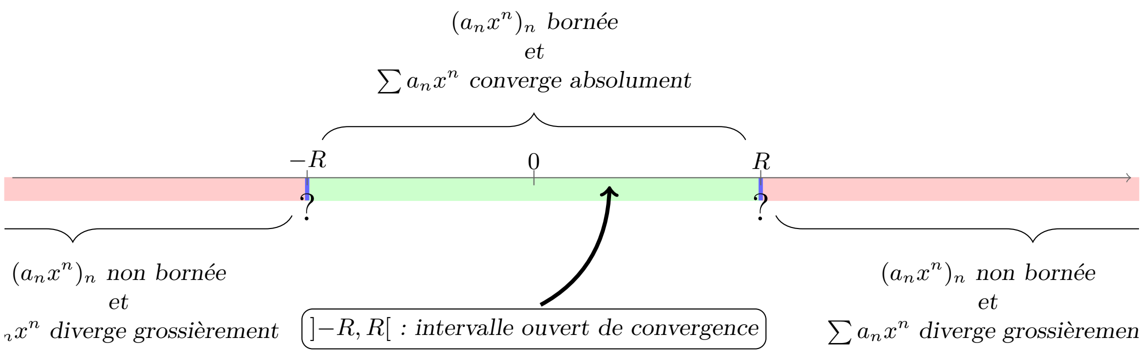
Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

$$]-R, R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R, R[$ la **somme** de la série entière :

$$\begin{array}{rccl} S : &]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad\qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad\qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

Remarque. *L'étude de la convergence sur le cercle d'incertitude n'est pas un objectif du programme. Précisons tout de même que, si on note D le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$, on a :*

$$D(0,R) \subset D \subset \overline{D(0,R)}$$

1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

1.3.1 Quelques situations fréquentes

La connaissance de la convergence pour certaines valeurs de z nous renseigne souvent suffisamment pour déduire la valeur de R. Précisons :

Proposition.

- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $z_0 \in \overline{D(0,R)}$ i.e. $R \geqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, alors $z_0 \notin D(0,R)$ i.e. $R \leqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $z_0 \in C(0,R)$ i.e. $R = |z_0|$.

Remarque. *En pratique, on applique souvent la proposition précédente avec z_0 réel.*

Exemple. On note a_n le n-ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Proposition.

- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, alors $R \geqslant \rho$.
- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant \rho$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Exemple de référence. On a :

$$R\Big(\sum n^\alpha x^n\Big) = 1$$

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Voir aussi au § 3.5 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.*

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n. Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque.

- *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*
- *Lorsque $\ell = +\infty$, $R = 0$; lorsque $\ell = 0$, $R = +\infty$.*
- *Lorsque la suite $(a_n)_n$ s'annule, on peut envisager d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.*
- *Souvent, la détermination du rayon de convergence peut se faire sans utiliser la règle de d'Alembert.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.2 Somme de deux séries entières

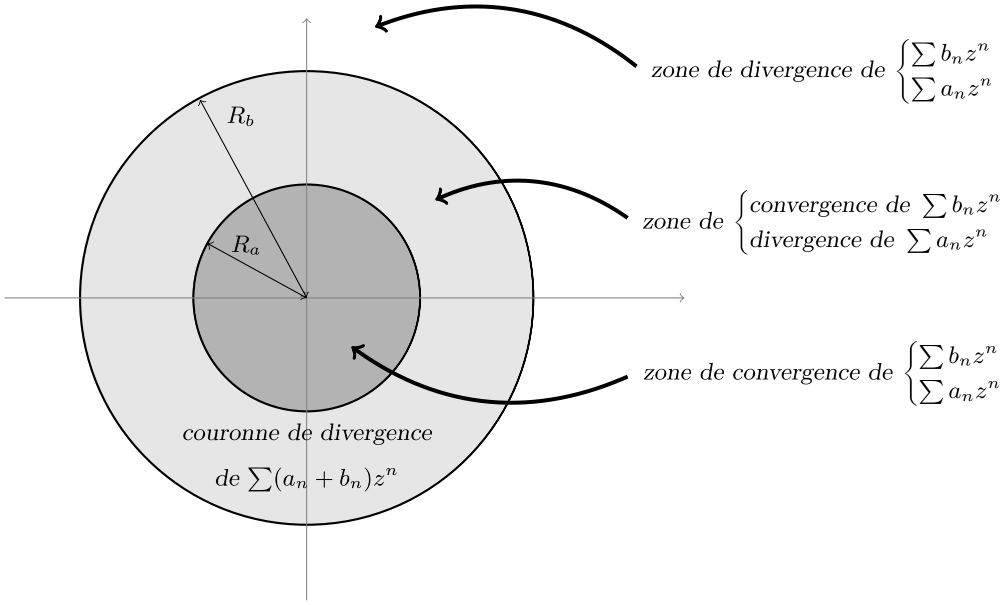
Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.



Exemple. Donner un exemple de deux séries entières pour lesquelles $R > R_a = R_b$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.*

Théorème.

$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset\ ]-R, R[$.

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n,\ \sum \frac{x^n}{n},\ \sum \frac{x^n}{n^2}$$

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
> Sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

Théorème d'Abel radial.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
> Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a, b] \subset]-R, R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \, \mathrm{d}t \right)$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

Exemple. Primitiver $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
> Sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
> De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:
>
> $$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* ***au voisinage de*** *0 ou* ***en*** *0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

Proposition. Si f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors il est unique.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*
Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :

$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

  Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :

$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$

Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

Les rayons de convergences sont égaux.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :

$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Les rayons de convergences sont égaux.

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$*, mais son développement en série entière sur* $]-1, 1[$ *(ou peut-être* $[-1, 1]$*, mais pas plus).*

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Remarque. *On peut définir, par exemple :*

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui prolongent à $\mathbb{C}$ le développement en série entière réel connu. On remarque qu'alors :

$$\sin(\mathrm{i}z) = i \operatorname{sh}(z)$$

6 Annexes

6.1 Complément : démonstration du théorème d'Abel radial

Théorème d'Abel radial.

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière.
Si la série numérique $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \lesssim 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Preuve. On note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On passe par les sommes partielles et on effectue une transformation d'Abel. Pour $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1) a_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1)(A_n - A_{n-1}) \\
&\qquad \text{où } A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } A_{-1} = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1) A_n - \sum_{n=0}^{N-1} (x^{n+1} - 1) A_n \\
&\qquad \text{par glissement d'indice} \\
&= (x^N - 1) A_N - (x - 1) \sum_{n=1}^{N} x^{n-1} A_{n-1}
\end{aligned}$$

À t fixé, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) - \ell = (0 - 1)\ell - (x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n A_n$$

cette dernière série étant nécessairement convergente puisque les autres termes sont de limite finie. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
f(x) - \ell &= (x - 1)\Big(\frac{\ell}{1 - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n A_n \Big) \\
&= (x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ell - A_n)
\end{aligned}$$

On veut montrer que cette quantité tend vers 0 en revenant à la définition. Prenons donc $\varepsilon > 0$. Comme $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|A_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc, pour ce N :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ell| &\leqslant (1 - x)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} x^n |A_n - \ell| + \sum_{n=N}^{+\infty} x^n \frac{\varepsilon}{2} \Big) \\
&= (1 - x)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} x^n |A_n - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x^N}{1 - x} \Big) \\
&\leqslant (1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Mais N est fixé, donc $(1 - x) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell|}_{\text{constante}} \xrightarrow[x \lesssim 1]{} 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [1 - \alpha, 1[$:

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc montré que, pour tout $x \in [1 - \alpha, 1[$:

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et donc que $f(x) \xrightarrow[x \lesssim 1]{} \ell$. □

Remarque. *Dans le cas général d'une limite pour $x \lesssim R$, on se ramène au résultat précédent en posant $g(t) = f(Rt)$.*

Remarque. *La réciproque du théorème précédent est fausse, comme le montre l'exemple $\sum (-1)^n x^n$ qui est de rayon 1, de somme prolongeable ayant une limite finie en 1, mais $\sum (-1)^n 1^n$ n'est pas convergente.*

Exercices et résultats classiques à connaître

Une somme calculée par une SE

55.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

Une somme calculée à l'aide une SE prolongée au bord

55.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Une somme calculée de deux façons

55.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1,1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

55.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

Utiliser un DSE pour prouver une classe $\mathcal{C}^\infty$

55.5

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Le DSE d'Arccos

55.6

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

Exercices du CCINP

55.7 CCINP 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in\,]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

55.8 CCINP 15.3

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

55.9 CCINP 19

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
   Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

55.10 CCINP 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
   (c) $\sum \cos n z^n$.

55.11 CCINP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

55.12 CCINP 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f \;:\; x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

55.13 — INP **23**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.

   On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

55.14 — INP **24**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

55.15 — INP **32.1**

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.

   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

55.16 — INP **47**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

55.17 — INP **51**

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercices

Rayon de convergence

55.18

Donner le rayon de convergence pour les séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum \cos\frac{2n\pi}{3}\, x^n$ (d) $\displaystyle\sum \cos^2 n\, x^n$

55.19

(a) Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) z^n$.

55.20

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\displaystyle I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\, \mathrm{d}t$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Calcul de somme de série entière

55.21

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+1)2^{n+1} x^n$ (d) $\displaystyle\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \forall n \end{cases}$

55.22

Démontrer que ϕ définie par $\displaystyle\phi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen de fonctions usuelles.

55.23

Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

55.24

Calculer la somme et préciser le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{(n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos na}{n!}x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

55.25

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum u_n z^n$.

Développement en série entière d'une fonction

55.26

Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

(a) $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$

(b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

(c) $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$

(d) $x \longmapsto (\text{Arcsin}x)^2$
Utiliser une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.

(e) $x \longmapsto \sin^2 x$.

55.27

On définit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

55.28

Résoudre l'équation $\sin x = 13$.

Petits problèmes d'entrainement

55.29 ✍

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne. On note a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E. Ainsi, on a $a_1 = 1$ par convention, puis $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$ etc.
On admet pour l'instant que pour tout $n \geqslant 2$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \tag{1}$$

(a) On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$, on note R son rayon de convergence, et on suppose $R > 0$. On note $f(x)$ sa somme. Montrer que, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:
$$(f(x))^2 - f(x) + x = 0$$

(b) Calculer R et $f(x)$.

(c) En déduire l'expression de a_n.

(d) Démontrer la relation (1).

55.30 ✍

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on note :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n,\ g(x) = f(x)^2,\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

(a) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)_n$ telle que :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n sous la forme d'une somme de Riemann et déterminer un équivalent simple de u_n.

(c) Pour $x \in]-1,1[$, déterminer l'expression de $h(x)$ et un équivalent de $h(x)$ pour $x \underset{<}{\to} 1$.

(d) Déterminer un équivalent de $g(x)$ et de $f(x)$ pour $x \underset{<}{\to} 1$.

55.31

Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})x^n$.

55.32

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

55.33

On considère les suites complexes définies par : $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$$

On pose alors $u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.
Déterminer le rayon de convergence de u et v, et calculer leurs sommes.

55.34

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum W_n x^n$.

55.35

Pour x réel, on note sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x) + f'(x) + f(x)$.

(c) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

55.36

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

55.37

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 /\ p + 2q = n\}$ qui représente par exemple le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et 2 euros. Développer en série entière la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)}$, et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

55.38

Pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) f est-elle continue sur $]-1,1[$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$?

(c) Montrer que f admet un DSE sur $]-1,1[$.

55.39

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
Montrer que I existe et la calculer grâce à une série entière.

55.40

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

(b) Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

55.41

Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donnés. Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque $\overline{D(0,R)}$.

55.42

(a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0.
Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$.

(b) En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan} x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

55.43

On note :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \, x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $\left[-1,1\right[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

(d) Montrer que f est continue sur $\left[-1,1\right[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

55.44

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \underset{<}{\longrightarrow} 1$.

(a) La série $\sum a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

(b) On suppose désormais que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et que $\ell = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.