Séries entières

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série de fonctions ? Différents modes de convergence ?
2. Lien entre suite convergente et suite bornée ?
3. Lien entre $\sum u_n$ convergente et (u_n) bornée ?
4. Qu'est-ce que la convergence absolue d'une série numérique ?
   Lien entre convergence absolue et convergence ?
5. Qu'est-ce qu'un produit de Cauchy ?
6. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$? Pour quels x ?
7. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Pour quels x ?
8. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$? Pour quels x ?
9. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n/2}}$?
10. Qu'est-ce que la règle de D'Alembert ?
11. Condition nécessaire (ou suffisante ?) pour que la somme S d'une série de fonctions soit continue sur I ?
    Idem pour dériver S ?
12. Formule de Taylor avec reste intégral ?
13. Développements limités en 0 des fonctions usuelles (exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, Arctan).

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*
Lorsque $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.
Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

> Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
> Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \text{Sup}\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est infini (resp. nul, resp. égal à 1).

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

- Si $|z| < R$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

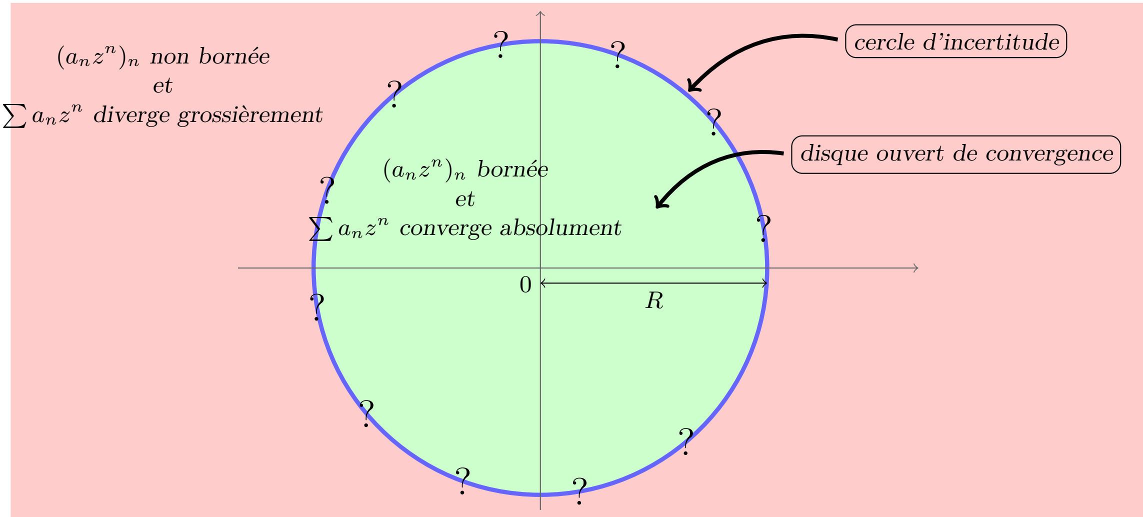
Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0,R)$ la **somme** de la série entière : $\begin{array}{rccc} S : & D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$

Le cercle $C(0, R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



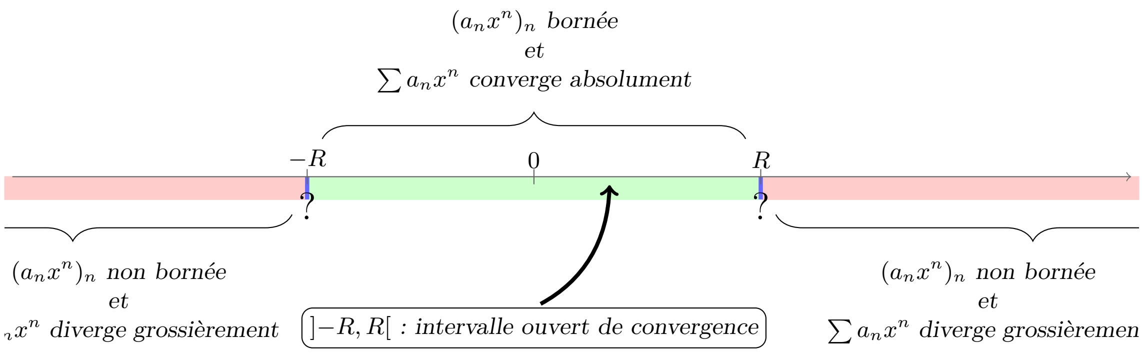
Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

$$]-R, R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R, R[$ la **somme** de la série entière :

$$\begin{array}{rcl} S : \ ]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

Remarque. *L'étude de la convergence sur le cercle d'incertitude n'est pas un objectif du programme. Précisons tout de même que, si on note D le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$, on a :*

$$D(0,R) \subset D \subset \overline{D(0,R)}$$

1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

1.3.1 Quelques situations fréquentes

La connaissance de la convergence pour certaines valeurs de z nous renseigne souvent suffisamment pour déduire la valeur de R. Précisons :

Proposition.

- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $z_0 \in \overline{D(0,R)}$ i.e. $R \geqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, alors $z_0 \notin D(0,R)$ i.e. $R \leqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $z_0 \in C(0,R)$ i.e. $R = |z_0|$.

Remarque. *En pratique, on applique souvent la proposition précédente avec z_0 réel.*

Exemple. On note a_n le n-ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Proposition.

- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, alors $R \geqslant \rho$.
- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant \rho$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Exemple de référence. On a :

$$R\Big(\sum n^\alpha x^n\Big) = 1$$

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Voir aussi au § 3.5 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.*

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n. Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque.

- *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*
- *Lorsque $\ell = +\infty$, $R = 0$; lorsque $\ell = 0$, $R = +\infty$.*
- *Lorsque la suite $(a_n)_n$ s'annule, on peut envisager d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.*
- *Souvent, la détermination du rayon de convergence peut se faire sans utiliser la règle de d'Alembert.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.2 Somme de deux séries entières

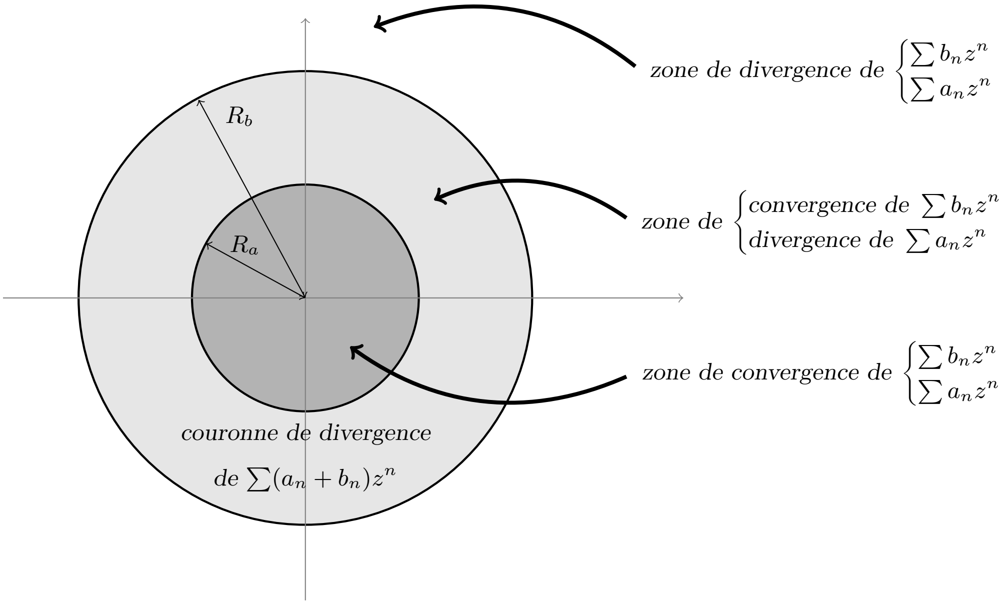
Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.



Exemple. Donner un exemple de deux séries entières pour lesquelles $R > R_a = R_b$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.*

Théorème.

$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset\,]-R, R[$.

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n,\ \sum \frac{x^n}{n},\ \sum \frac{x^n}{n^2}$$

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

Théorème d'Abel radial.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a, b] \subset]-R, R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \,\mathrm{d}t \right)$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* ***au voisinage de*** *0 ou* ***en*** *0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

Proposition. Si f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors il est unique.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*
Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :

  $$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

  Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :

$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$

  Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

  Les rayons de convergences sont égaux.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :

$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

  Les rayons de convergences sont égaux.

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$, *mais son développement en série entière sur* $]-1, 1[$ *(ou peut-être* $[-1, 1]$, *mais pas plus).*

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Remarque. *On peut définir, par exemple :*

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui prolongent à $\mathbb{C}$ le développement en série entière réel connu. On remarque qu'alors :

$$\sin(\mathrm{i}z) = i\operatorname{sh}(z)$$

6 Annexes

6.1 Complément : démonstration du théorème d'Abel radial

Théorème d'Abel radial.

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière.
Si la série numérique $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \lesssim 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Preuve. On note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On passe par les sommes partielles et on effectue une transformation d'Abel. Pour $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1) a_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1)(A_n - A_{n-1}) \\
&\quad \text{où } A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } A_{-1} = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} (x^n - 1) A_n - \sum_{n=0}^{N-1} (x^{n+1} - 1) A_n \\
&\quad \text{par glissement d'indice} \\
&= (x^N - 1) A_N - (x - 1) \sum_{n=1}^{N} x^{n-1} A_{n-1}
\end{aligned}$$

À t fixé, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) - \ell = (0 - 1)\ell - (x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n A_n$$

cette dernière série étant nécessairement convergente puisque les autres termes sont de limite finie. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
f(x) - \ell &= (x - 1)\Big(\frac{\ell}{1 - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n A_n\Big) \\
&= (x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ell - A_n)
\end{aligned}$$

On veut montrer que cette quantité tend vers 0 en revenant à la définition. Prenons donc $\varepsilon > 0$. Comme $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|A_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc, pour ce N :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ell| &\leqslant (1 - x)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} x^n |A_n - \ell| + \sum_{n=N}^{+\infty} x^n \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&= (1 - x)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} x^n |A_n - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x^N}{1 - x}\Big) \\
&\leqslant (1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Mais N est fixé, donc $(1-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell|}_{\text{constante}} \xrightarrow[x \lesssim 1]{} 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [1 - \alpha, 1[$:

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} |A_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc montré que, pour tout $x \in [1 - \alpha, 1[$:

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et donc que $f(x) \xrightarrow[x \lesssim 1]{} \ell$. □

Remarque. *Dans le cas général d'une limite pour $x \lesssim R$, on se ramène au résultat précédent en posant $g(t) = f(Rt)$.*

Remarque. *La réciproque du théorème précédent est fausse, comme le montre l'exemple $\sum (-1)^n x^n$ qui est de rayon 1, de somme prolongeable ayant une limite finie en 1, mais $\sum (-1)^n 1^n$ n'est pas convergente.*

Exercices et résultats classiques à connaître

Une somme calculée par une SE

550.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

Une somme calculée à l'aide une SE prolongée au bord

550.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Une somme calculée de deux façons

550.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1,1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

550.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

Utiliser un DSE pour prouver une classe $\mathcal{C}^\infty$

550.5

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence de la série de Taylor de $\tan$

550.6

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercices du CCINP

550.7 — CCINP 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

550.8 — CCINP 15.3

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

550.9 — CCINP 19

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
   Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

550.10 — CCINP 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
   (c) $\sum \cos n z^n$.

550.11 — CCINP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

550.12 — CCINP 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

550.13 CCINP 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.

   On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

550.14 CCINP 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

550.15 CCINP 32.1

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

550.16 CCINP 47

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

550.17 CCINP 51

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercices

Rayon de convergence

550.18

Donner le rayon de convergence pour les séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n} z^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^{2n}$

(c) $\sum \cos \frac{2n\pi}{3}\, x^n$ (d) $\sum \cos^2 n\; x^n$

550.19

(a) Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) z^n$.

550.20

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Calcul de somme de série entière

550.21

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$

(c) $\sum_{n\geqslant 0} (n^2+1)2^{n+1} x^n$ (d) $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ \forall n \end{cases}$

550.22

Démontrer que ϕ définie par $\phi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen de fonctions usuelles.

550.23

Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

(a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sin(n\theta)$

(c) $\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$ (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$

(e) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$ (f) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$

(g) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

550.24

Calculer la somme et préciser le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{(n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos na}{n!} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

550.25

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum u_n z^n$.

Développement en série entière d'une fonction

550.26

Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

(a) $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$

(b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

(c) $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$

(d) $x \longmapsto (\mathrm{Arcsin} x)^2$
Utiliser une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.

(e) $x \longmapsto \sin^2 x$.

550.27

On définit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

550.28

Résoudre l'équation $\sin x = 13$.

Petits problèmes d'entrainement

550.29 ✍

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne. On note a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E. Ainsi, on a $a_1 = 1$ par convention, puis $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$ etc.
On admet pour l'instant que pour tout $n \geqslant 2$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \tag{1}$$

(a) On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$, on note R son rayon de convergence, et on suppose $R > 0$. On note $f(x)$ sa somme. Montrer que, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:

$$(f(x))^2 - f(x) + x = 0$$

(b) Calculer R et $f(x)$.

(c) En déduire l'expression de a_n.

(d) Démontrer la relation (1).

550.30 ✍

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on note :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n,\ g(x) = f(x)^2,\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

(a) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)_n$ telle que :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n sous la forme d'une somme de Riemann et déterminer un équivalent simple de u_n.

(c) Pour $x \in]-1,1[$, déterminer l'expression de $h(x)$ et un équivalent de $h(x)$ pour $x \underset{<}{\to} 1$.

(d) Déterminer un équivalent de $g(x)$ et de $f(x)$ pour $x \underset{<}{\to} 1$.

550.31

Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})x^n$.

550.32

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

550.33

On considère les suites complexes définies par : $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$$

On pose alors $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.
Déterminer le rayon de convergence de u et v, et calculer leurs sommes.

550.34

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum W_n x^n$.

550.35

Pour x réel, on note sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x) + f'(x) + f(x)$.

(c) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

550.36

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

550.37

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / \; p + 2q = n\}$ qui représente par exemple le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et 2 euros.
Développer en série entière la fonction $f \; : \; t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)}$, et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

550.38

Pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible, on pose $f(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) f est-elle continue sur $]-1,1[$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$?

(c) Montrer que f admet un DSE sur $]-1,1[$.

550.39

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
Montrer que I existe et la calculer grâce à une série entière.

550.40

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$

   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

   (b) Pour tout $x \in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

550.41

Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donnés. Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque $\overline{D(0,R)}$.

550.42

(a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0.
Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$.

(b) En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan} x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

550.43

On note :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \, x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

(d) Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

550.44

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \underset{<}{\longrightarrow} 1$.

(a) La série $\sum a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

(b) On suppose désormais que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

550.45

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé.

(a) Utiliser une transformation d'Abel pour montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge.

(b) Calculer la somme de cette série.

550.46

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner $R > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-R,R[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Que vaut $\binom{\alpha}{n}$?

(b) Soit $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \binom{\alpha+\alpha'}{n} = \sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+q=n}} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha'}{q}$$

(c) Soit $0 < x < y$. Montrer que :

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}$$

(d) Soit $\beta > 0$. Montrer que :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\beta}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(e) Montrer que, pour tout $\alpha > -1$:

$$2^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$$

550.47

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ soit $+\infty$.

(a) Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) Si $f \in E$, on pose pour $t \in \mathbb{R}$:

$$T(f)(t) = f(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres.

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est un idéal de E et que $E = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.