

Sommabilité, sommes

Cours	2
1 Sommes finies	2
1.1 Quelques sommes finies classiques	2
1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées	2
2 Ensembles dénombrables	3
2.1 Parties de \mathbb{N}	3
2.2 Dénombrabilité	3
2.3 Exemples et contre-exemples	3
2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables	3
2.5 D'autres exemples	3
3 Somme d'une famille de réels positifs	3
3.1 Définition	3
3.2 Invariance par permutation	4
3.3 Sommation par paquets	4
3.4 Théorème de Fubini positif	4
3.5 Opérations	5
3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs	5
4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes	5
4.1 Définitions	5
4.2 Invariance par permutation	6
4.3 Sommation par paquets	6
4.4 Théorème de Fubini	6
4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$	7
5 Annexes	7
5.1 Annexe : toute partie de \mathbb{N} est finie ou dénombrable	7
5.2 Complément : sommation par paquets	7
Exercices	8
Exercices et résultats classiques à connaître	8
Une égalité avec ζ	8
Exercices	9

1 Sommes finies

1.1 Quelques sommes finies classiques

Résultat.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Résultat.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque. On peut en déduire que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ en développant $(k+1)^4$ par la formule du binôme et en sommant pour $k = 0, \dots, n$.

Résultat.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} 1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \sum_{k=1}^n x^k = \begin{cases} x \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résultat.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées

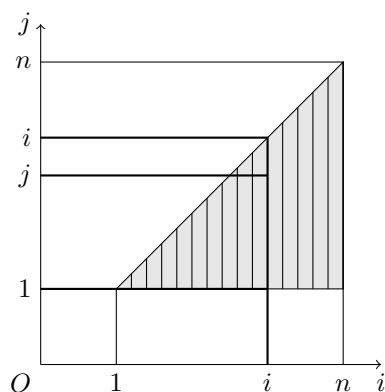
Proposition. Si I et J sont deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels ou de complexes, la commutativité (et l'associativité) de l'addition permet de justifier :

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

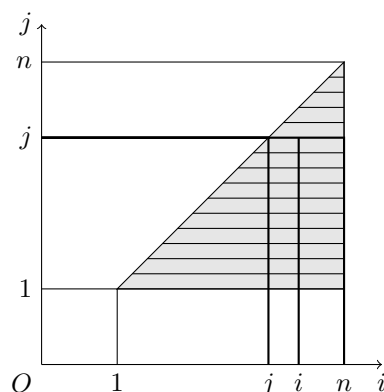
Remarque. On parle de sommes triangulaires lorsque les $a_{i,j}$ sont nuls pour $i < j$ par exemple. Dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{i,j} \right)$$

formule qu'il convient de retrouver par le schéma suivant :



D'abord, i varie de 1 à n , puis, pour chaque i fixé, j varie de 1 à i



D'abord, j varie de 1 à n , puis, pour chaque j fixé, i varie de j à n

Remarque. La distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'écrire :

$$\left(\sum_{i \in I} a_i\right) \left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

2 Ensembles dénombrables

2.1 Parties de \mathbb{N}

Proposition. Toute partie de \mathbb{N} est finie ou en bijection avec \mathbb{N} .

2.2 Dénombrabilité

Définition. Un ensemble A est **dénombrable** s'il existe une bijection entre A et \mathbb{N} .

Un ensemble A est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Corollaire. Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Remarque. Dire qu'un ensemble est au plus dénombrable, c'est que l'on peut énumérer ses éléments, via la bijection de la définition.

2.3 Exemples et contre-exemples

Exemple. \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Exemple. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme. \mathbb{N}^2 est dénombrable.

2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables

Proposition. Si A_1, \dots, A_p sont au plus dénombrables, alors le produit cartésien $A_1 \times \dots \times A_p$ est au plus dénombrable.

Proposition. S'il existe une surjection $\mathbb{N} \rightarrow A$, alors A est au plus dénombrable.

Proposition. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

2.5 D'autres exemples

Exemple. \mathbb{Z}, \mathbb{N}^p sont dénombrables.

Proposition. \mathbb{Q} est dénombrable.

3 Somme d'une famille de réels positifs

3.1 Définition

Définition. Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini, voire non dénombrable) et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs indexée par I . On définit alors la **somme de la famille** $(u_i)_{i \in I}$ dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ comme étant :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j, J \text{ partie finie de } I \right\}$$

Remarque. On peut étendre naturellement cette définition aux familles $(u_i)_{i \in I}$ où $u_i \in [0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Proposition. Lorsque I est fini, la somme de la famille est sa somme.

Proposition. Lorsque $I = \mathbb{N}$ (et toujours $u_n \geq 0$ pour tout n) :

- si la série $\sum u_n$ converge, sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, au sens des sommes de séries convergentes, est égale à la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, au sens des familles sommables.
- si la série $\sum u_n$ diverge, sa somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ au sens des familles sommables vaut $+\infty$. On peut donc raisonnablement noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

3.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, avec I au plus dénombrable, et σ une permutation de I , c'est-à-dire une bijection : $I \rightarrow I$. Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Remarque. Ça signifie que l'ordre de sommation des familles (au plus dénombrables) de réels positifs n'intervient pas dans la valeur de la somme.

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, avec I dénombrable. On peut énumérer les éléments de I en proposant une bijection : $\mathbb{N} \rightarrow I$
 $k \mapsto i_k$

Dans ce cas, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

3.3 Sommation par paquets

Définition. Soit I un ensemble. On dit que $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de I , ou encore un **recouvrement disjoint** de I si et seulement si :

$$\bigcup_{j \in J} I_j = I \quad \text{et} \quad j \neq j' \implies I_j \cap I_{j'} = \emptyset$$

Remarque. En toute rigueur, on parle de **partition** lorsqu'aucun des I_j n'est vide.

Théorème.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Remarque. En pratique, on dit que l'on a sommé en faisant des « paquets », les sous-familles $(u_i)_{i \in I_j}$.

3.4 Théorème de Fubini positif

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs. Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

et ces sommes valent $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$.

Remarque. Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.

3.5 Opérations

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I . Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I . Si, pour tout $i \in I$, $0 \leq u_i \leq v_i$, alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$ une partie de I . Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** si et seulement si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors le nombre d'éléments > 0 de la famille est au plus dénombrable.

4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes

4.1 Définitions

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** si et seulement si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, i.e. :

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

où $u_i^+ = \text{Max}(u_i, 0)$ et $u_i^- = \text{Max}(-u_i, 0)$.

Remarque. Il s'agit d'une définition théorique, jamais utilisée en pratique. Pour le calcul effectif, on décrit les u_i en extension par une énumération, on fait des paquets etc.

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Remarque. Lorsque la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est indexée par \mathbb{N} , elle est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ converge absolument. Dans ce cas, sa somme est la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(v_i)_i$ une famille sommable de réels positifs. Si, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

4.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou de complexes, et σ une permutation de I . Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ l'est. Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

4.3 Sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . On suppose $(u_i)_{i \in I}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Attention. Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_i)_{i \in I}$, par exemple en montrant

$$\text{que } \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} |u_i| \right) < +\infty.$$

4.4 Théorème de Fubini

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels ou complexes. On suppose $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

et ces sommes valent $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$.

Remarque. Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.

Attention. Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, par exemple en

montrant que $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} |u_{i,j}| \right) < +\infty$, ou l'autre.

Proposition. Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont deux familles de réels ou complexes sommables, alors $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

Ce résultat s'étend au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Remarque. La proposition précédente, dans le cas de familles indexées par \mathbb{N} , est le résultat « produit de Cauchy » de séries absolument convergentes, avec des paquets bien choisis pour la famille doublement indexée.

4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$, $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels ou complexes, indexées par le même ensemble I . Soit λ et μ deux scalaires. On suppose que $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

Définition. On note $\ell^1(I)$ l'espace vectoriel des familles sommables indexées par I .

Remarque. Il s'agit, selon le contexte, du \mathbb{C} -espace vectoriel des familles sommables de complexes indexées par I , ou alors du \mathbb{R} -espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par I .

5 Annexes

5.1 Annexe : toute partie de \mathbb{N} est finie ou dénombrable

Proposition. Toute partie de \mathbb{N} est finie ou en bijection avec \mathbb{N} .

Preuve. Soit A une partie de \mathbb{N} . On suppose A infinie. Définissons l'application ϕ par récurrence en posant :

$\phi(0) = \min(A)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n+1) = \min(A \cap [\phi(n)+1, +\infty[)$

- L'application ϕ est bien à valeurs dans A , par définition du minimum.
- L'application ϕ satisfait $\phi(n+1) \geq \phi(n) + 1$. Ainsi ϕ est strictement croissante, donc injective.

- La croissance stricte de ϕ permet de justifier, par récurrence, que $\phi(n) \geq n$ pour tout n , et donc $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par minoration.
- Montrons que $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ est surjective. Soit $a \in A$. On considère $E = \{n \in \mathbb{N}, \phi(n+1) > a\}$. C'est une partie de \mathbb{N} , non vide par définition de $\phi(n) \rightarrow +\infty$, donc admet un plus petit élément : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(n) \leq a < \phi(n+1)$. On a alors $\phi(n) = a$, car $\phi(n) < a$ contredirait la récurrence définissant $\phi(n+1)$. On a montré que ϕ est surjective.

En conclusion, on a montré qu'une partie de \mathbb{N} est soit finie, soit en bijection avec \mathbb{N} . \square

5.2 Complément : sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Preuve.

- Si pour un $j \in J$, $\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$, comme $I_j \subset I$, on a :

$$+\infty = \sum_{i \in I_j} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

d'où l'égalité.

- On suppose que, pour tout $j \in J$, $\sum_{i \in I_j} u_i < +\infty$. On note $S = \sum_{i \in I} u_i$ et $T = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$ et on veut montrer que :

$$S = T$$

\square Rappelons que S est définie dans $[0, +\infty]$ comme :

$$S = \sup \left\{ \sum_{k \in K} u_k, K \subset I, K \text{ finie} \right\}$$

Soit K une partie finie de I . Pour tout $k \in K$, comme $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I , il existe un unique $j_k \in J$ tel que $k \in I_{j_k}$. On note

$J' = \{j_k, k \in K\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} u_k &\leq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \\ &\leq \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = T \end{aligned}$$

Ce majorant étant indépendant de K , on a donc par définition d'une borne supérieure :

$$S \leq T$$

$\boxed{\geq}$ Rappelons que T est définie dans $[0, +\infty]$ comme :

$$T = \sup \left\{ \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right), K \subset J, K \text{ finie} \right\}$$

Soit K une partie finie de J , on note p son cardinal.

Rappelons que $\sum_{i \in I_k} u_i$ est définie comme :

$$\sum_{i \in I_k} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in X_k} u_i, X_k \subset I_k, X_k \text{ finie} \right\}$$

Considérons, pour tout $k \in K$, une partie finie X_k de I_k . Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $k \in K$, il existe une partie finie

X_k de I_k telle que :

$$\sum_{i \in I_k} u_i - \frac{\varepsilon}{p} \leq \sum_{i \in X_k} u_i$$

et donc, comme K est de cardinal p :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right) - \varepsilon &\leq \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in X_k} u_i \right) \\ &= \sum_{i \in \bigcup_{k \in K} X_k} u_i \\ &\leq \sum_{i \in I} u_i \\ &= S \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que :

$$\sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right) \leq S$$

Ce majorant est indépendant de K , donc par définition de la borne supérieure :

$$T \leq S$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Une égalité avec ζ

560.1

Soit $s > 1$. On note $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

Exercices

560.2

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} \left(\frac{1}{n^{\alpha p}} \right)_{n,p \geq 2} & \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{(b)} \left(\frac{1}{np(n+p)} \right)_{n,p \geq 1} & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(c)} \left(\frac{1}{a^p + b^q} \right)_{n,p \geq 0} \\ \text{où } a, b > 0 \end{array}$$

560.3

Montrer que la série :

$$\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1)$$

converge, et calculer sa somme.

On rappelle que, pour $s \in]1, +\infty[$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

560.4

Discuter selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la somme :

$$\sum_{n,m \geq 1} \frac{1}{(n+m)^\alpha}$$

560.5

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ et $u_n = z^{|n|}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

est sommable, et calculer sa somme.

560.6

Montrer l'identité :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

560.7

Démontrer l'existence et calculer :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

560.8

Justifier l'existence et calculer :

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} \sum_{p,q \geq 0} \frac{z^p}{q!} & \text{où } |z| < 1 \\ \text{(b)} \sum_{p,q \geq 0} \frac{a^p b^q}{p! q!} & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(c)} \sum_{p,q \geq 0} \frac{q^p z^p}{p! q!} \end{array}$$