

# Sommabilité, sommes

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Sommes finies . . . . .	2
1.1 Quelques sommes finies classiques . . . . .	2
1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées . . . . .	2
2 Ensembles dénombrables . . . . .	3
2.1 Parties de $\mathbb{N}$ . . . . .	3
2.2 Dénombrabilité . . . . .	3
2.3 Exemples et contre-exemples . . . . .	3
2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables . . . . .	3
2.5 D'autres exemples . . . . .	3
3 Somme d'une famille de réels positifs . . . . .	3
3.1 Définition . . . . .	3
3.2 Invariance par permutation . . . . .	4
3.3 Sommation par paquets . . . . .	4
3.4 Théorème de Fubini positif . . . . .	4
3.5 Opérations . . . . .	5
3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs . . . . .	5
4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes . . . . .	5
4.1 Définitions . . . . .	5
4.2 Invariance par permutation . . . . .	6
4.3 Sommation par paquets . . . . .	6
4.4 Théorème de Fubini . . . . .	6
4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$ . . . . .	7
5 Annexes . . . . .	7
5.1 Annexe : toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable . . . . .	7
5.2 Complément : sommation par paquets . . . . .	7
<b>Exercices</b>	<b>8</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	8
Une égalité avec $\zeta$ . . . . .	8
Exercices . . . . .	9

## 1 Sommes finies

### 1.1 Quelques sommes finies classiques

Résultat.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Résultat.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque. On peut en déduire que  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  en développant  $(k+1)^4$  par la formule du binôme et en sommant pour  $k = 0, \dots, n$ .

Résultat.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} 1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \sum_{k=1}^n x^k = \begin{cases} x \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résultat.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

### 1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées

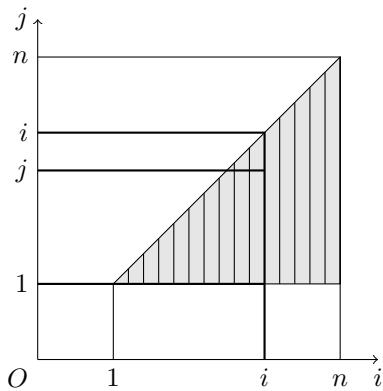
Proposition. Si  $I$  et  $J$  sont deux ensembles finis et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels ou de complexes, la commutativité (et l'associativité) de l'addition permet de justifier :

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

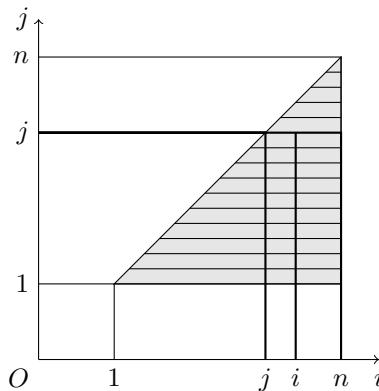
Remarque. On parle de sommes triangulaires lorsque les  $a_{i,j}$  sont nuls pour  $i < j$  par exemple. Dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j}^n a_{i,j} \right)$$

formule qu'il convient de retrouver par le schéma suivant :



D'abord,  $i$  varie de 1 à  $n$ , puis,  
pour chaque  $i$  fixé,  $j$  varie de 1 à  $i$



D'abord,  $j$  varie de 1 à  $n$ , puis,  
pour chaque  $j$  fixé,  $i$  varie de  $j$  à  $n$

**Remarque.** La distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'écrire :

$$\left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

## 2 Ensembles dénombrables

### 2.1 Parties de $\mathbb{N}$

**Proposition.** Toute partie de  $\mathbb{N}$  est finie ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

### 2.2 Dénombrabilité

**Définition.** Un ensemble  $A$  est **dénombrable** s'il existe une bijection entre  $A$  et  $\mathbb{N}$ .

Un ensemble  $A$  est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

**Proposition.** Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Corollaire.** Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

**Remarque.** Dire qu'un ensemble est au plus dénombrable, c'est que l'on peut énumérer ses éléments, via la bijection de la définition.

### 2.3 Exemples et contre-exemples

**Exemple.**  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Exemple.**  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  n'est pas dénombrable.

**Lemme.**  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.

### 2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables

**Proposition.** Si  $A_1, \dots, A_p$  sont au plus dénombrables, alors le produit cartésien  $A_1 \times \dots \times A_p$  est au plus dénombrable.

**Proposition.** S'il existe une surjection  $\mathbb{N} \rightarrow A$ , alors  $A$  est au plus dénombrable.

**Proposition.** Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

### 2.5 D'autres exemples

**Exemple.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^p$  sont dénombrables.

**Proposition.**  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

## 3 Somme d'une famille de réels positifs

### 3.1 Définition

**Définition.** Soit  $I$  un ensemble quelconque (fini ou infini, voire non dénombrable) et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs indexée par  $I$ . On définit alors la **somme de la famille**  $(u_i)_{i \in I}$  dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  comme étant :

$$\sum_{i \in I} u_i = \text{Sup}\{\sum_{j \in J} u_j, J \text{ partie finie de } I\}$$

**Remarque.** On peut étendre naturellement cette définition aux familles  $(u_i)_{i \in I}$  où  $u_i \in [0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition.** Lorsque  $I$  est fini, la somme de la famille est sa somme.

**Proposition.** Lorsque  $I = \mathbb{N}$  (et toujours  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ ) :

- si la série  $\sum u_n$  converge, sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , au sens des sommes de séries convergentes, est égale à la somme  $\sum_{n \in N} u_n$ , au sens des familles sommables.
- si la série  $\sum u_n$  diverge, sa somme  $\sum_{n \in N} u_n$  au sens des familles sommables vaut  $+\infty$ . On peut donc raisonnablement noter  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

## 3.2 Invariance par permutation

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, avec  $I$  au plus dénombrable, et  $\sigma$  une permutation de  $I$ , c'est-à-dire une bijection :  $I \rightarrow I$ . Alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

**Remarque.** Ça signifie que l'ordre de sommation des familles (au plus dénombrables) de réels positifs n'intervient pas dans la valeur de la somme.

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, avec  $I$  dénombrable. On peut **énumérer** les éléments de  $I$  en proposant une bijection :  $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & I \\ k & \mapsto & i_k \end{array}$

Dans ce cas, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

## 3.3 Sommation par paquets

**Définition.** Soit  $I$  un ensemble. On dit que  $(I_j)_{j \in J}$  est une **partition de  $I$** , ou encore un **recouvrement disjoint de  $I$**  si et seulement si :

$$\bigcup_{j \in J} I_j = I \quad \text{et} \quad j \neq j' \implies I_j \cap I_{j'} = \emptyset$$

**Remarque.** En toute rigueur, on parle de **partition** lorsqu'aucun des  $I_j$  n'est vide.

**Théorème.**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, et  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$ .  
Alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

**Remarque.** En pratique, on dit que l'on a sommé en faisant des « paquets », les sous-familles  $(u_i)_{i \in I_j}$ .

## 3.4 Théorème de Fubini positif

**Théorème.**

Soit  $I, J$  deux ensembles et  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs.  
Alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

et ces sommes valent  $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ .

**Remarque.** Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.

### 3.5 Opérations

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$  deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble  $I$ .

Alors, pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ , dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$  deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble  $I$ .

Si, pour tout  $i \in I$ ,  $0 \leq u_i \leq v_i$ , alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. Soit  $J \subset I$  une partie de  $I$ .

Alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

### 3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs

**Définition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs.

On dit que  $(u_i)_{i \in I}$  est **sommable** si et seulement si  $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ .

**Proposition.** Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de réels positifs, alors le nombre d'éléments  $> 0$  de la famille est au plus dénombrable.

## 4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes

### 4.1 Définitions

**Définition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres réels ou complexes. On dit que  $(u_i)_{i \in I}$  est **sommable** si et seulement si  $(|u_i|)_{i \in I}$  est sommable, i.e. :

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

**Définition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille sommable de nombres réels. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

où  $u_i^+ = \max(u_i, 0)$  et  $u_i^- = \max(-u_i, 0)$ .

**Remarque.** Il s'agit d'une définition théorique, jamais utilisée en pratique. Pour le calcul effectif, on décrit les  $u_i$  en extension par une énumération, on fait des paquets etc.

**Définition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille sommable de nombres complexes. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

**Remarque.** Lorsque la famille  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est indexée par  $\mathbb{N}$ , elle est sommable si et seulement si la série  $\sum u_i$  converge absolument. Dans ce cas, sa somme est la somme de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou complexes, et  $(v_i)_i$  une famille sommable de réels positifs. Si, pour tout  $i \in I$ ,  $|u_i| \leq v_i$ , alors  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable.

## 4.2 Invariance par permutation

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou de complexes, et  $\sigma$  une permutation de  $I$ . Alors  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$  l'est. Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

## 4.3 Sommation par paquets

**Théorème.**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou complexes, et  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$ . On suppose  $(u_i)_{i \in I}$  sommable. Alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

**Attention.** Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de  $(u_i)_{i \in I}$ , par exemple en montrant que  $\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} |u_i| \right) < +\infty$ .

## 4.4 Théorème de Fubini

**Théorème.**

Soit  $I, J$  deux ensembles et  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels ou complexes. On suppose  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  sommable. Alors :

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

et ces sommes valent  $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ .

**Remarque.** Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.

**Attention.** Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ , par exemple en montrant que  $\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} |u_{i,j}| \right) < +\infty$ , ou l'autre.

**Proposition.** Si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  sont deux familles de réels ou complexes sommables, alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right)$$

Ce résultat s'étend au produit d'un nombre fini de familles sommables.

**Remarque.** La proposition précédente, dans le cas de familles indexées par  $\mathbb{N}$ , est le résultat « produit de Cauchy » de séries absolument convergentes, avec des paquets bien choisis pour la famille doublement indexée.

## 4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$

**Proposition.** Soit  $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$  deux familles de réels ou complexes, indexées par le même ensemble  $I$ . Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. On suppose que  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  sont sommables. Alors  $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$  est sommable et :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

**Définition.** On note  $\ell^1(I)$  l'espace vectoriel des familles sommables indexées par  $I$ .

**Remarque.** Il s'agit, selon le contexte, du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des familles sommables de complexes indexées par  $I$ , ou alors du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par  $I$ .

## 5 Annexes

### 5.1 Annexe : toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable

**Proposition.** Toute partie de  $\mathbb{N}$  est finie ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$ . On suppose  $A$  infinie. Définissons l'application  $\phi$  par récurrence en posant :

$$\phi(0) = \text{Min}(A) \text{ et, pour } n \in \mathbb{N}, \phi(n+1) = \text{Min}(A \cap [\phi(n)+1, +\infty])$$

- L'application  $\phi$  est bien à valeurs dans  $A$ , par définition du minimum.
- L'application  $\phi$  satisfait  $\phi(n+1) \geq \phi(n) + 1$ . Ainsi  $\phi$  est strictement croissante, donc injective.

- La croissance stricte de  $\phi$  permet de justifier, par récurrence, que  $\phi(n) \geq n$  pour tout  $n$ , et donc  $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  par minoration.
- Montrons que  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$  est surjective. Soit  $a \in A$ . On considère  $E = \{n \in \mathbb{N}, \phi(n+1) > a\}$ . C'est une partie de  $\mathbb{N}$ , non vide par définition de  $\phi(n) \rightarrow +\infty$ , donc admet un plus petit élément : il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi(n) \leq a < \phi(n+1)$ . On a alors  $\phi(n) = a$ , car  $\phi(n) < a$  contredirait la récurrence définissant  $\phi(n+1)$ . On a montré que  $\phi$  est surjective.

En conclusion, on a montré qu'une partie de  $\mathbb{N}$  est soit finie, soit en bijection avec  $\mathbb{N}$ .  $\square$

### 5.2 Complément : sommation par paquets

#### Théorème.

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, et  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$ . Alors, dans  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

*Preuve.*

- Si pour un  $j \in J$ ,  $\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$ , comme  $I_j \subset I$ , on a :

$$+\infty = \sum_{i \in I_j} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

d'où l'égalité.

- On suppose que, pour tout  $j \in J$ ,  $\sum_{i \in I_j} u_i < +\infty$ . On note  $S = \sum_{i \in I} u_i$  et  $T = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$  et on veut montrer que :

$$S = T$$

$\square$  Rappelons que  $S$  est définie dans  $[0, +\infty]$  comme :

$$S = \text{Sup} \left\{ \sum_{k \in K} u_k, K \subset I, K \text{ finie} \right\}$$

Soit  $K$  une partie finie de  $I$ . Pour tout  $k \in K$ , comme  $(I_j)_{j \in J}$  est une partition de  $I$ , il existe un unique  $j_k \in J$  tel que  $k \in I_{j_k}$ . On note

$J' = \{j_k, k \in K\}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} u_k &\leq \sum_{j \in J'} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) \\ &\leq \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) = T \end{aligned}$$

Ce majorant étant indépendant de  $K$ , on a donc par définition d'une borne supérieure :

$$S \leq T$$

□ Rappelons que  $T$  est définie dans  $[0, +\infty]$  comme :

$$T = \text{Sup} \left\{ \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} u_i \right), K \subset J, K \text{ finie} \right\}$$

Soit  $K$  une partie finie de  $J$ , on note  $p$  son cardinal.

Rappelons que  $\sum_{i \in I_k} u_i$  est définie comme :

$$\sum_{i \in I_k} u_i = \text{Sup} \left\{ \sum_{i \in X_k} u_i, X_k \subset I_k, X_k \text{ finie} \right\}$$

Considérons, pour tout  $k \in K$ , une partie finie  $X_k$  de  $I_k$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la borne supérieure, pour tout  $k \in K$ , il existe une partie finie

$X_k$  de  $I_k$  telle que :

$$\sum_{i \in I_k} u_i - \frac{\varepsilon}{p} \leq \sum_{i \in X_k} u_i$$

et donc, comme  $K$  est de cardinal  $p$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} u_i \right) - \varepsilon &\leq \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in X_k} u_i \right) \\ &= \sum_{i \in \bigcup_{k \in K} X_k} u_i \\ &\leq \sum_{i \in I} u_i \\ &= S \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , c'est que :

$$\sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} u_i \right) \leq S$$

Ce majorant est indépendant de  $K$ , donc par définition de la borne supérieure :

$$T \leq S$$

□

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Une égalité avec $\zeta$

#### 560.1

Soit  $s > 1$ . On note  $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$ . Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

**Exercices****560.2**

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

(a)  $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p \geqslant 2}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$

(b)  $\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p \geqslant 1}$

(c)  $\left(\frac{1}{a^p + b^q}\right)_{n,p \geqslant 0}$  où  $a, b > 0$

**560.3**

Montrer que la série :

$$\sum_{p \geqslant 2} (\zeta(p) - 1)$$

converge, et calculer sa somme.

On rappelle que, pour  $s \in ]1, +\infty[$ ,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

**560.4**

Discuter selon la valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature de la somme :

$$\sum_{n,m \geqslant 1} \frac{1}{(n+m)^\alpha}$$

**560.5**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$  et  $u_n = z^{|n|}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Montrer que la famille :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

est sommable, et calculer sa somme.

**560.6**

Montrer l'identité :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

**560.7**

Démontrer l'existence et calculer :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

**560.8**

Justifier l'existence et calculer :

(a)  $\sum_{p,q \geqslant 0} \frac{z^p}{q!}$  où  $|z| < 1$

(b)  $\sum_{p,q \geqslant 0} \frac{a^p b^q}{p! q!}$

(c)  $\sum_{p,q \geqslant 0} \frac{q^p z^p}{p! q!}$