Sommabilité, sommes

Cours **2**

Exercices **8**

1 Sommes finies

1.1 Quelques sommes finies classiques

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque. *On peut en déduire que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *en développant* $(k+1)^4$ *par la formule du binôme et en sommant pour* $k = 0, \ldots, n$*.*

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} 1\,\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} x\,\dfrac{1-x^{n}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées

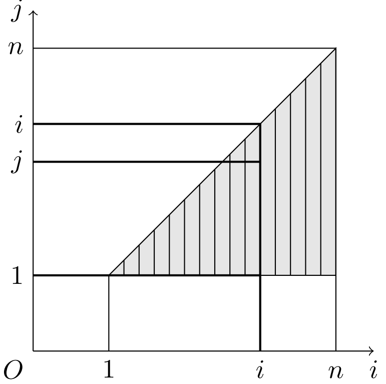
Proposition. Si I et J sont deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou de complexes, la commutativité (et l'associativité) de l'addition permet de justifier :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in I}\left(\sum_{i\in J} a_{i,j}\right)$$

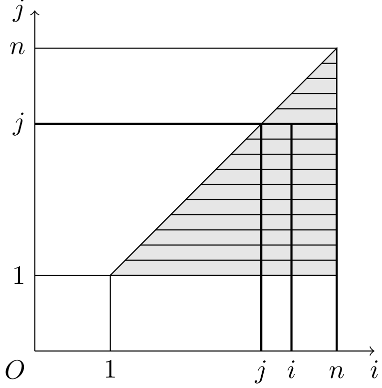
Remarque. *On parle de sommes triangulaires lorsque les* $a_{i,j}$ *sont nuls pour* $i < j$ *par exemple. Dans ce cas :*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right)$$

formule qu'il convient de retrouver par le schéma suivant :



D'abord, i varie de 1 à n, puis, pour chaque i fixé, j varie de 1 à i



D'abord, j varie de 1 à n, puis, pour chaque j fixé, i varie de j à n

Remarque. *La distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'écrire :*

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 Ensembles dénombrables

2.1 Parties de $\mathbb{N}$

Proposition. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

2.2 Dénombrabilité

Définition. Un ensemble A est **dénombrable** s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.
Un ensemble A est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire. Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Remarque. *Dire qu'un ensemble est au plus dénombrable, c'est que l'on peut énumérer ses éléments, via la bijection de la définition.*

2.3 Exemples et contre-exemples

Exemple. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exemple. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve. □

2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables

Proposition. Si A_1, ..., A_p sont au plus dénombrables, alors le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est au plus dénombrable.

Proposition. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Proposition. S'il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, alors A est au plus dénombrable.

Preuve. □

2.5 D'autres exemples

Exemple. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ sont dénombrables.

Proposition. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

3 Somme d'une famille de réels positifs

3.1 Définition

Définition. Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini, voire non dénombrable) et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. On définit alors **la somme de la famille** $(u_i)_{i\in I}$ dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ comme étant :

$$\sum_{i\in I} u_i = \mathrm{Sup}\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \text{ partie finie de } I\}$$

Remarque. *On peut étendre naturellement cette définition aux familles $(u_i)_{i\in I}$ où $u_i \in [0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.*

Proposition. Lorsque I est fini, la somme de la famille est sa somme.

Proposition. Lorsque $I = \mathbb{N}$ (et toujours $u_n \geqslant 0$ pour tout n) :

- si la série $\sum u_n$ converge, sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, au sens des sommes de séries convergentes, est égale à la somme $\sum_{n\in N} u_n$, au sens des familles sommables.
- si la série $\sum u_n$ diverge, sa somme $\sum_{n\in N} u_n$ au sens des familles sommables vaut $+\infty$. On peut donc raisonnablement noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

3.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I au plus dénombrable, et σ une permutation de I, c'est-à-dire une bijection : $I \to I$. Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Remarque. *Ça signifie que l'ordre de sommation des familles (au plus dénombrables) de réels positifs n'intervient pas dans la valeur de la somme.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I dénombrable. On peut **énumérer** les éléments de I en proposant une bijection : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & I \\ k & \mapsto & i_k \end{array}$
Dans ce cas, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

3.3 Sommation par paquets

Définition. Soit I un ensemble. On dit que $(I_j)_{j\in J}$ est une **partition de** I, ou encore un **recouvrement disjoint de** I si et seulement si :

$$\bigcup_{j\in J} I_j = I \quad \text{et} \quad j \neq j' \implies I_j \cap I_{j'} = \varnothing$$

Remarque. *En toute rigueur, on parle de* **partition** *lorsqu'aucun des I_j n'est vide.*

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Remarque. *En pratique, on dit que l'on a sommé en faisant des « paquets », les sous-familles $(u_i)_{i\in I_j}$.*

3.4 Théorème de Fubini positif

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*

3.5 Opérations

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Si, pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant v_i$, alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$ une partie de I.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Proposition. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors le nombre d'éléments > 0 de la famille est au plus dénombrable.

4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes

4.1 Définitions

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. :

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I} |u_i| \leqslant +\infty$$

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

où $u_i^+ = \mathrm{Max}(u_i, 0)$ et $u_i^- = \mathrm{Max}(-u_i, 0)$.

Remarque. *Il s'agit d'une définition théorique, jamais utilisée en pratique. Pour le calcul effectif, on décrit les u_i en extension par une énumération, on fait des paquets etc.*

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i}\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Remarque. *Lorsque la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$, elle est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ converge absolument. Dans ce cas, sa somme est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(v_i)_i$ une famille sommable de réels positifs. Si, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

4.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes, et σ une permutation de I. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

4.3 Sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$, par exemple en montrant que $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} |u_i|\right) < +\infty$.*

4.4 Théorème de Fubini

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou complexes. On suppose $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*

Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, par exemple en montrant que $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|u_{i,j}|\right) < +\infty$, ou l'autre.*

Proposition. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles de réels ou complexes sommables, alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)$$

Ce résultat s'étend au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Remarque. *La proposition précédente, dans le cas de familles indexées par $\mathbb{N}$, est le résultat « produit de Cauchy » de séries absolument convergentes, avec des paquets bien choisis pour la famille doublement indexée.*

4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels ou complexes, indexées par le même ensemble I. Soit λ et μ deux scalaires. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Définition. On note $\ell^1(I)$ l'espace vectoriel des familles sommables indexées par I.

Remarque. *Il s'agit, selon le contexte, du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des familles sommables de complexes indexées par I, ou alors du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par I.*

5 Annexes

5.1 Annexe : toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable

Proposition. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Preuve. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose A infinie. Définissons l'application ϕ par récurrence en posant :

$\phi(0) = \mathrm{Min}(A)$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $\phi(n+1) = \mathrm{Min}(A\cap[\![\phi(n)+1, +\infty[\![)$

- L'application ϕ est bien à valeurs dans A, par définition du minimum.
- L'application ϕ satisfait $\phi(n+1) \geqslant \phi(n)+1$. Ainsi ϕ est strictement croissante, donc injective.
- La croissance stricte de ϕ permet de justifier, par récurrence, que $\phi(n) \geqslant n$ pour tout n, et donc $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par minoration.
- Montrons que $\phi : \mathbb{N} \to A$ est surjective. Soit $a\in A$. On considère $E = \{n\in\mathbb{N},\ \phi(n+1) > a\}$. C'est une partie de $\mathbb{N}$, non vide par définition de $\phi(n)\to+\infty$, donc admet un plus petit élément : il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\phi(n) \leqslant a < \phi(n+1)$. On a alors $\phi(n) = a$, car $\phi(n) < a$ contredirait la récurrence définissant $\phi(n+1)$. On a montré que ϕ est surjective.

En conclusion, on a montré qu'une partie de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit en bijection avec $\mathbb{N}$.

□

5.2 Complément : sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\,\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Preuve.

- Si pour un $j\in J$, $\sum_{i\in I_j} u_i = +\infty$, comme $I_j\subset I$, on a :

$$+\infty = \sum_{i\in I_j} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

d'où l'égalité.
- On suppose que, pour tout $j\in J$, $\sum_{i\in I_j} u_i < +\infty$. On note $S = \sum_{i\in I} u_i$ et $T = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$ et on veut montrer que :

$$S = T$$

$\boxed{\leqslant}$ Rappelons que S est définie dans $[0,+\infty]$ comme :

$$S = \text{Sup}\left\{\sum_{k\in K} u_k,\ K\subset I,\ K \text{ finie}\right\}$$

Soit K une partie finie de I. Pour tout $k\in K$, comme $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, il existe un unique $j_k\in J$ tel que $k\in I_{j_k}$. On note $J'=\{j_k,\ k\in K\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K} u_k &\leqslant \sum_{j\in J'}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\\ &\leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = T\end{aligned}$$

Ce majorant étant indépendant de K, on a donc par définition d'une borne supérieure :

$$S\leqslant T$$

$\boxed{\geqslant}$ Rappelons que T est définie dans $[0,+\infty]$ comme :

$$T = \text{Sup}\left\{\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right),\ K\subset J,\ K \text{ finie}\right\}$$

Soit K une partie finie de J, on note p son cardinal.
Rappelons que $\sum\limits_{i\in I_k} u_i$ est définie comme :

$$\sum_{i\in I_k} u_i = \text{Sup}\left\{\sum_{i\in X_k} u_i,\ X_k\subset I_k,\ X_k \text{ finie}\right\}$$

Considérons, pour tout $k\in K$, une partie finie X_k de I_k. Fixons $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $k\in K$, il existe une partie finie X_k de I_k telle que :

$$\sum_{i\in I_k} u_i - \frac{\varepsilon}{p} \leqslant \sum_{i\in X_k} u_i$$

et donc, comme K est de cardinal p :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right) - \varepsilon &\leqslant \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in X_k} u_i\right)\\ &= \sum_{i\in \bigcup\limits_{k\in K} X_k} u_i\\ &\leqslant \sum_{i\in I} u_i\\ &= S\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, c'est que :

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)\leqslant S$$

Ce majorant est indépendant de K, donc par définition de la borne supérieure :

$$T\leqslant S$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Une égalité avec ζ

56.1

Soit $s>1$. On note $\zeta(s)=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{s+1}}\right)$$

Exercices

56.2

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

(a) $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geqslant 2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\left(\dfrac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p\geqslant 1}$

(c) $\left(\dfrac{1}{a^p + b^q}\right)_{n,p\geqslant 0}$ où $a, b > 0$

56.3

Montrer que la série :

$$\sum_{p\geqslant 2} \big(\zeta(p) - 1\big)$$

converge, et calculer sa somme.

On rappelle que, pour $s \in]1, +\infty[$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

56.4

Discuter selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la somme :

$$\sum_{n,m\geqslant 1} \frac{1}{(n+m)^\alpha}$$

56.5

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ et $u_n = z^{|n|}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

est sommable, et calculer sa somme.

56.6

Montrer l'identité :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

56.7

Démontrer l'existence et calculer :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

56.8

Justifier l'existence et calculer :

(a) $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 0} \frac{z^p}{q!}$ où $|z| < 1$

(b) $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 0} \frac{a^p\, b^q}{p!\, q!}$

(c) $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 0} \frac{q^p\, z^p}{p!\, q!}$

Petits problèmes d'entrainement

56.9

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

(a) L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

(b) L'ensemble F des parties finies de $\mathbb{N}$.

(c) L'ensembles $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

56.10

Démontrer que tout ensemble infini contient une partie dénombrable.

56.11

(a) Démontrer qu'un ensemble I est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont l'union est égale à I.

(b) Utiliser ce critère pour démontrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}[X]$ sont dénombrables.

56.12

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. Pour $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit :

$$\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$$

(a) Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k\, v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

(b) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par :

$$(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ puis majorer $\|u \star v\|$ à l'aide de $\|u\|$ et $\|v\|$.

(c) Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative et qu'elle possède un neutre.

(d) On considère $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

56.13

Pour $n, p \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$\begin{cases} a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2 - p^2} & \text{si } n \neq p \\ a_{n,n} = 0 \end{cases}$$

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et commenter le résultat.

56.14

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que : $\displaystyle\frac{z}{1-z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{2^p}}{1 - z^{2^{p+1}}}$.

56.15

Pour $x \in\,]-1, 1[$, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

56.16

(a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

(b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

(c) Montrer qu'alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

56.17

Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^s}$.

On considère l'ensemble des nombres premiers, énumérés par ordre croissant :

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$$

On fixe un réel $s > 1$.

(a) On considère $n \geqslant 1$ et on pose, pour $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$:

$$u_{k_1,\dots,k_n} = \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n})^s}$$

Montrer que la famille u ainsi définie est sommable. On note σ_n sa somme.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leqslant \sigma_n \leqslant \zeta(s)$

(c) Justifier : $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.